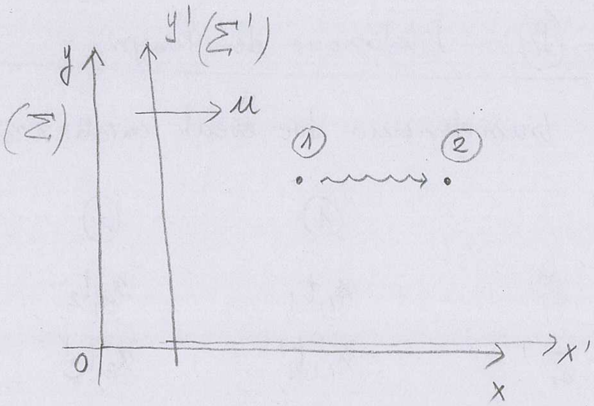
TRASFORMAZIONI DI LORENTZ



$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{u}{c}x\right)$$
$$x' = \gamma\left(x - \frac{u}{c}ct\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

dove $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$. In forma matriciale:

N.B.

Nel limite di piccole velocità

$$t' = t$$
$$x' = x - vt$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \overset{\leftrightarrow}{L}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\beta \equiv u/c$

Le trasformazioni di Lorentz implicano che:

Ⓐ <u>La velocità della luce è costante in tutti i sistemi di riferimento</u>

Considero un oggetto che si sposta da ① a ②. Allora:

	①	②		
in Σ:	x_1, t_1	x_2, t_2	$\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta t = t_2 - t_1$	$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$
in Σ':	x_1', t_1'	x_2', t_2'	$\Delta x' = x_2' - x_1'$; $\Delta t' = t_2' - t_1'$	$v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$

Se uso le trasformazioni di Lorentz:

$$\underline{x}_2' - \underline{x}_1' = \overset{\leftrightarrow}{L}\left(\underline{x}_2 - \underline{x}_1\right) \Rightarrow \begin{cases} c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \frac{u}{c}\Delta x\right) \\ \Delta x' = \gamma\left(\Delta x - \frac{u}{c}c\Delta t\right) \end{cases}$$

dove: $\underline{x} \equiv (ct, x, y, z)$

Da ciò segue:

$$v' = \frac{c\Delta x'}{c\Delta t'} = \frac{c[\Delta x - \beta c\Delta t]}{c\Delta t - \beta\Delta x} = \frac{c[\Delta x/\Delta t - \beta c]}{c - \beta\frac{\Delta x}{\Delta t}} = c\,\frac{v - \beta c}{c - \beta v} = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c}\cdot\frac{v}{c}}$$

– <u>N.B.</u> – se $v = c \Rightarrow \boxed{v' = \frac{c-u}{1-\frac{u}{c}} = \frac{c-u}{c-u}\cdot c = v}$

- (B) - Dilatazione dei tempi -

Consideriamo due eventi caratterizzati da:

	(1)	(2)	
Σ	x_1, t_1	x_2, t_2	con $x_2 = x_1$
Σ'	x_1', t_1'	x_2', t_2'	

(considero un oggetto puntiforme) fermo nel riferimento Σ

Allora $c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \cancel{\beta \Delta x}\right) = \gamma c \Delta t \Longrightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t$

$\gamma > 1$

- (C) - Contrazione distanze -

Considero due eventi caratterizzati da:

	(1)	(2)	
Σ	(x_1, t_1)	(x_2, t_2)	
Σ'	(x_1', t_1')	(x_2', t_2')	con $t_2' = t_1'$

(Considero un oggetto esteso fermo nel sistema di riferimento Σ. Per misurare la lunghezza in Σ' devo determinare le posizioni dei suoi estremi x_1' ed x_2' a tempi uguali, i.e. $t_1' = t_2'$)

Per misurare la lunghezza in Σ' scelgo tempi uguali:

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta \Delta x) = 0 \longrightarrow c\Delta t = \beta \Delta x$$

Se uso questa relazione, ottengo:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - \beta c \Delta t) = \\ &\gamma(\Delta x - \beta^2 \Delta x) = \gamma(1-\beta^2)\underbrace{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\gamma}\Delta x \end{aligned}$$

distanza spaziale tra i due eventi nel sistema Σ

Infatti: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \dfrac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2}$

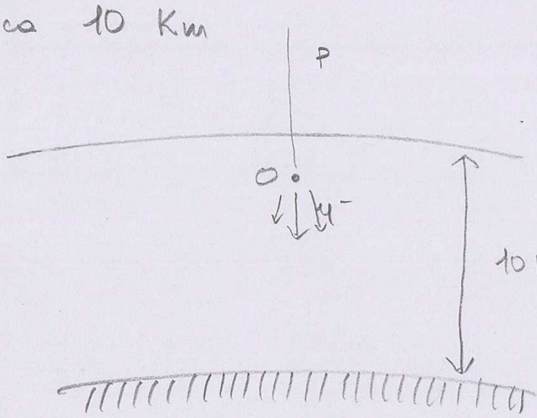
Es. decadimento dei muoni

L'atmosfera terrestre viene "bombardata" dai raggi cosmici, i.e. protoni (e nuclei di elio-4, etc.) che vengono accelerati in siti di produzione cosmici (e.g. resti di supernovae, etc) ancora da identificare con certezza e pervadono l'universo.

I protoni dei raggi cosmici urtano i nuclei presenti nell'atmosfera terrestre (principalmente ossigeno) e producono varie particelle tra cui muoni

μ^- = particella carica negativamente $\qquad m_\mu \cong 200\, m_e$
instabile $\qquad \tau_\mu = 2 \cdot 10^{-6}\, s$

Lo spessore dell'atmosfera è pari a circa 10 Km



– Quanto spazio percorre un muone prima di decadere?

(A) Se non ci fosse la dilatazione dei tempi

$$L = \tau_\mu \cdot v_\mu < \tau_\mu \cdot c = 2 \cdot 10^{-6}\, s \times 3 \cdot 10^{8}\, m \cdot s^{-1} = 600\, m$$

I muoni non potrebbero raggiungere la Terra

(B) Tenendo conto della dilatazione dei tempi – $\quad \tau_\mu(v) \neq \tau_\mu(v=0)$

$$L = \tau_\mu(v_\mu) \cdot v_\mu = \tau_\mu(v_\mu = 0) \cdot \gamma(v_\mu)\, v_\mu$$

Se $v_\mu \cong (1 - \xi_\mu) c \longrightarrow \gamma(v_\mu) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{(1-\xi_\mu)^2 \cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\cancel{1} - \cancel{1} + 2\xi_\mu - \xi_\mu^2}} \simeq \dfrac{1}{\sqrt{2\xi_\mu}}$

$$L = \frac{(1-\xi_\mu)\,\tau_\mu(0)\, c}{\sqrt{2\xi_\mu}} \cong 600\, m \cdot \frac{1}{\sqrt{2\xi_\mu}}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \xi_\mu = \dfrac{10^{-2}}{2} \\ L \sim 6000\, m \end{array} \right.$

DINAMICA (ed il ruolo della massa)

Le leggi della meccanica Newtoniana possono essere ricavate da:

(1) Principio di relatività (+ legge composizione delle velocità) -

(2) II legge di Newton -

$$(*) \quad \vec{F}_{TOT} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad m = \text{massa inerziale della particella}$$

(3) III legge di Newton (Principio di Azione e reazione)

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$
$$dir(\vec{F}_{AB}) = dir(\vec{r}_{AB})$$

$\Longrightarrow$ In un processo d'urto (i.e. in cui agiscono solo forze interne) -

$$\begin{cases} \vec{P}_{TOT} = \text{conservato} \\ E_{TOT} = \text{conservato} \\ \vec{J}_{TOT} = \text{conservato} \end{cases}$$

dove
$$\vec{P} \equiv m\vec{v}$$
$$E = \tfrac{1}{2} m v^2$$
$$\vec{J} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

— N.B. — La relazione (*) è consistente con un principio di relatività solo se accettiamo la composizione classica delle velocità:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Inoltre, la relazione (*) implica che, in presenza di una forza, le particelle possano essere accelerate ad una velocità $v > c$. Noto infatti che, in meccanica classica, l'energia cinetica di una particella che si muove alla velocità della luce è finita:

$$E = \tfrac{1}{2} m c^2 = \Delta L$$ — Lavoro necessario per portare una particella ferma a velocità $v = c$

$\Longrightarrow$ La (2) deve essere modificata. Prescrizione di Feynman:

$$\vec{F}_{TOT} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{P}_{CLASSICO} = m\vec{v}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{P}_{REL} = m\gamma(v)\vec{v}$$

II Legge di Newton per sistemi dotati di massa variabile

Con questa ipotesi

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{p} = m\gamma(v)\vec{v} \longrightarrow |\vec{p}| \to \infty \quad \text{se } |\vec{v}| \to c$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v}$$

<u>Relazione di Poisson</u>

Per un generico vettore $\vec{A}(t)$, la derivata può essere espressa nella forma:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d|\vec{A}|}{dt}\hat{u}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{A}$$

$\hat{u}_A$ = versore diretto come $\vec{A}$

$\vec{\omega}_A$ = velocità "angolare" della rotazione di $\vec{A}$

<u>N.B.</u>

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v} =$$

$$= \left[\frac{d|\vec{p}|}{dt}\hat{p} + \hat{\omega}_p \wedge \vec{p}\right]\cdot\vec{v} =$$

questo vettore è perpendicolare a $\vec{v}$

$$= \frac{d|\vec{p}|}{dt}\cdot|\vec{v}|$$

Da questa relazione segue che

$$\frac{dE(p)}{dp} = v \qquad \boxed{\text{RELAZIONE DI DISPERSIONE}}$$

Deve quindi essere:

$$\begin{cases} E \simeq cp & \text{per } p \to \infty \\ E = \dfrac{p^2}{2m} + \text{cost} & \text{per } p \to 0 \end{cases}$$

Ricaviamo la relazione di dispersione utilizzando la prescrizione di Feynmann:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(m\gamma(v)\vec{v}\right)\cdot\vec{v} = \frac{m}{2\gamma(v)}\frac{d}{dt}\left[\left(\gamma^2(v)\cdot v^2\right)\right] =$$

$$= \frac{mc^2}{2\gamma(v)}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(1-\beta^2(v))}\frac{v^2}{c^2}\right] = \frac{mc^2}{2\gamma(v)}\frac{d}{dt}\left[\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right] =$$

$$= +\frac{mc^2}{2\gamma(v)}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{1-\beta^2} - 1\right] = +\frac{mc^2}{2\gamma(v)}\frac{d}{dt}\left[\gamma^2 - 1\right]$$

$$= +\frac{mc^2}{\cancel{2\gamma(v)}}\cdot\cancel{2\gamma(v)}\frac{d}{dt}\left[\gamma(v)\right] = \frac{d}{dt}\left[mc^2\gamma\right]$$

$$E = mc^2\gamma(v) + \cancel{\text{cost}}$$

Otteniamo allora

$$E^2 = (mc^2)^2\gamma^2 = (mc^2)^2\left[\gamma^2\beta^2 + 1\right] = m^2v^2\gamma^2 + m^2c^4$$
$$= c^2p^2 + m^2c^4$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = \gamma^2\beta^2 + 1$$

$$\left[\gamma^2(1-\beta^2) \equiv 1\right]$$

La relazione di dispersione di una particella relativistica è:

$$\boxed{E = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}} \qquad (*)$$

$$\frac{dE}{dp} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}}\,\cancel{2}c^2p = c\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+m^2c^2}} = c\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2c^2}{p^2}}}$$

$$\equiv c\cdot\left[\frac{cp}{E(p)}\right]$$

– N.B. –

(A) La massa <u>non</u> è la costante di proporzionalità tra $\vec{F}$ e $\frac{d\vec{v}}{dt}$
(il concetto stesso di forza va in crisi)

(B) La massa è la quantità fisica che definisce <u>la relazione di dispersione</u> della particella considerata

(C) La relazione (*) è la più generale relazione di dispersione per un sistema relativisticamente invariante —

$$E^2 - c^2p^2 = \text{invariante relativistica} = m^2c^4 \Rightarrow \text{proprietà intrinseca della particella}$$

$\Downarrow$

STESSO VALORE IN TUTTI I SISTEMI DI RIF. INERZIALI

Ogni "particella" (anche composta) deve essere caratterizzata da un valore di ~~4m~~ se essa è <u>relativisticamente invariante</u>

— RELAZIONE DI DISPERSIONE E MECCANICA QUANTISTICA —

Sappiamo che, in meccanica quantistica possiamo associare una funzione d'onda $\psi(\vec{r},t)$ ad ogni particella.
L'equazione d'onda può essere ricavata considerando che

$$E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{p} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Quindi

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \begin{cases} \xrightarrow{pc \gg mc^2} \; = cp \\ \xrightarrow{pc \ll mc^2} \; = \dfrac{p^2}{2m} + mc^2 \end{cases}$$

ULTRA - RELATIVISTICO $(m=0)$

$$\left(\cancel{i\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi(\vec{r},t) = + c^2\cancel{\hbar^2}\left(\cancel{i}\vec{\nabla}\right)^2\psi(\vec{r},t)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\vec{r},t) = 0 \qquad (*)$$

ONDA CHE PROPAGA CON VELOCITÀ = C

Più in generale:

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2c^4\right)\psi(\vec{r},t) = 0 \qquad (**)$$

NON RELATIVISTICO $(pc \ll mc^2)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\psi(\vec{r},t) + \cancel{mc^2\psi(\vec{r},t)} \qquad (***)$$

non produce effetti fisici

N.B. (A) Le equazioni (*) e (**) sono equazioni del secondo ordine rispetto alle derivate temporali, mentre (***) è una equazione del primo ordine (problema delle soluzioni ad "energie negative" per le equazioni relativistiche $\longrightarrow$ ANTIPARTICELLE)

(B) $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

$$v = \frac{dE}{dp} = \frac{d\omega}{dk} = \text{velocità di gruppo del pacchetto d'onde}$$

"EQUIVALENZA" MASSA ENERGIA

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \qquad \text{oppure} \qquad E = mc^2\gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nei processi fisici, vale la conservazione dell'energia –

$$E_{iniziale} = \sum_i E_i$$

$$E_{finale} = \sum_f E_f$$

$$E_{iniziale} = E_{finale}$$

– N.B. –
- La quantità conservata è l'energia, <u>non la massa</u>
- Posso trasformare (l'energia associata a) la massa di un corpo in altre forme di energia

Un corpo fermo ha una energia direttamente proporzionale alla sua massa

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \xrightarrow[p \to 0]{} E = mc^2$$

Es – elettrone $m_e = 0.91 \times 10^{-27}$ g

$$E_0 = m_e c^2 = (0.9 \times 10^{-27}\,g) \times (9 \times 10^{20}\,cm^2 s^{-2})$$

$$= 8 \times 10^{-7}\,erg = 8 \times 10^{-14}\,joule$$

$$1\,eV \equiv 1.6 \times 10^{-19}\,joule$$

$$E_0 = m_e c^2 \cong 8 \times 0.6 \times 10^{-14} \times 10^{19} \cong 0.5 \times 10^6\,eV = 0.5\,MeV$$

Allo stesso modo:

$$m_p c^2 = 938.3\,MeV$$

$$m_n c^2 = 939.6\,MeV$$

Decadimento del muone

Sapendo che la massa del muone è pari a $m_\mu c^2 = 106$ MeV, qual è l'energia minima che deve avere per attraversare l'atmosfera senza decadere, i.e. percorrere 10 Km prima di decadere.

$$L_\mu = \tau_\mu(0)\,\gamma(v_\mu)\,v_\mu = 600\ m\ \ \gamma(v_\mu)\frac{v_\mu}{c}$$

Abbiamo quindi che $\gamma(v_\mu)\dfrac{v_\mu}{c} \gtrsim 16$ (richiediamo $L_\mu \gtrsim 10$ Km)

$$\downarrow$$

$$\gamma(v_\mu) \gtrsim 16 \quad \text{essendo} \quad \frac{v_\mu}{c} \leq 1$$

- N.B. - Quando $\gamma \gg 1$, allora $v/c \cong 1$, essendo:

$$\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Sappiamo che $\gamma = \dfrac{E}{mc^2} \longrightarrow E_\mu \gtrsim (m_\mu c^2)\cdot 16$

$$= 106\ \text{MeV}\cdot 16 \cong 1600\ \text{MeV}$$

- Muoni con energia minore di 1.6 GeV decadono in atmosfera
- Muoni con energia superiore a 1.6 GeV arrivano a terra

- Esempio -

$$e^+ + e^- \longrightarrow \gamma + \gamma \qquad (*)$$

- e^+ = positrone = antiparticella dell'elettrone $\begin{cases} m_{e^+} = m_{e^-} = 0.511 \text{ MeV}/c^2 \\ q_{e^+} = -q_{e^-} \end{cases}$
- γ = fotone = particella associata alla radiazione elettromagnetica.

I fotoni hanno massa nulla $\quad m_\gamma = 0$

Dualismo onda - corpuscolo + Le onde elettromagnetiche propagano a velocità c

$E = \hbar \omega$

$\vec{p} = \hbar \vec{k}$

$\omega = c|\vec{k}|$

$\vec{k}$ = vettore d'onda = $\frac{2\pi}{\lambda}\hat{u}$ → versore propagazione dell'onda

$\Longrightarrow \quad E = \hbar\omega = \hbar c|\vec{k}| = c|\vec{p}|$

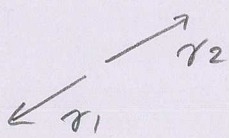
Relazione Energia-Impulso di una particella con $m = 0$

I positroni possono essere prodotti e.g. nella disintegrazione di nuclei radioattivi. Vengono poi rallentati attraverso urti con le altre particelle fino ad una energia dell'ordine di $KT \simeq 0.03$ eV (sono praticamente fermi!). A questo punto può avvenire il processo (*)

(A) Qual è la direzione dei fotoni (conservazione $\vec{P}_{TOT}$)?

$$\vec{P}_{ini} = \underbrace{\vec{P}_{e^-} + \vec{P}_{e^+}}_{=\vec{0}} = \vec{P}_{\gamma 1} + \vec{P}_{\gamma 2} = \vec{P}_{fin} \Longrightarrow \vec{P}_{\gamma_1} = -\vec{P}_{\gamma_2}$$

$$|\vec{P}_{\gamma_1}| = |\vec{P}_{\gamma_2}|$$



(B) Qual è l'energia dei fotoni:

$$E_{ini} = \underbrace{E_{e^-} + E_{e^+}}_{2m_e c^2} = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} = 2cP_\gamma \Longrightarrow cP_\gamma = E_\gamma = m_e c^2$$

$$P_\gamma \equiv |\vec{P}_{\gamma_1}| \equiv |\vec{P}_{\gamma_2}|$$

– Esempio –

$$p + d \longrightarrow {}^3He + \gamma$$

- $m_p c^2 = 938.2 \text{ MeV}$

  $m_d c^2 = 1875.6 \text{ MeV}$

  $m({}^3He)\, c^2 = (m_p + m_d)c^2 - Q \qquad Q = 5.5 \text{ MeV}$

– Applichiamo la conservazione dell'energia –

$$E_p + E_d = E_{{}^3He} + E_\gamma \qquad (*)$$

- Ipotizziamo che la collisione avvenga tra due nuclei "quasi fermi" (i.e. con energia cinetica $<< Q$)

$$E_p + E_d \cong (m_p + m_d)c^2 = E_{{}^3He} + E_\gamma$$

– La sola relazione $(*)$ non è sufficiente a chiudere il sistema (ho due incognite $\vec{P}_{{}^3He}$ e $\vec{P}_\gamma$). Sfrutto la conservazione dell'impulso:

$$\vec{0} = \vec{P}_{{}^3He} + \vec{P}_\gamma \qquad (**)$$

Ottengo allora

$$(m_p + m_d)c^2 = m_{{}^3He}c^2 + \overbrace{\frac{P^2_{{}^3He}}{2m_{{}^3He}}}^{\text{Forma Non Rel. della relazione energia-impulso}} + P_\gamma c$$

TRASCURABILE

$$\vec{0} = \vec{P}_{{}^3He} + \vec{P}_\gamma \Rightarrow |\vec{P}_{{}^3He}| = |\vec{P}_\gamma|$$

Si ottiene allora $\quad cP_\gamma = E_\gamma = (M_p + M_d - M_{^3He})c^2 =$

$= Q = 5.5 \text{ MeV}$

NOTA: L'energia portata via dal fotone (energia liberata dalla reazione) è uguale alla differenza di massa tra i nuclei presenti nello stato iniziale ed il nucleo presente nello stato finale.

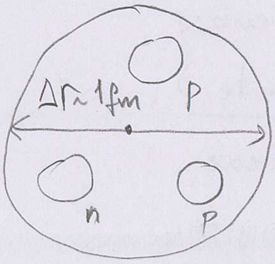
Energie di legame e "difetti di massa"

Considero un nucleo di ^3He indico la sua massa con $m(^3He)$.
Un nucleo di ^3He è composto da 2 protoni ed 1 neutrone.
Mi chiedo:

$$m(^3He) \overset{?}{=} 2m_p + m_n \qquad (*)$$

In meccanica relativistica, la massa è l'energia della particella nel suo sistema di quiete (a parte un fattore c^2)

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \xrightarrow[p=0]{} = mc^2$$



$$m(^3He) = \frac{E_{^3He}(p=0)}{c^2}$$

Posso riscrivere la relazione (*) nella forma:

$$E_{^3He}(p=0) \overset{?}{=} 2\,E_p(p=0) + E_n(p=0) \qquad (**)$$

La relazione (**) non appare scontata perché:

(A) Anche se il nucleo ^3He è fermo, i nucleoni al suo interno si muovono

$$\Delta r \cong 1.2\ \text{fm} \times A^{1/3} \qquad \begin{cases} 1\ \text{fm} = 10^{-13}\ \text{cm} \\ A = \text{Numero di nucleoni nel nucleo} \end{cases}$$

I nucleoni non possono essere perfettamente fermi. Il principio di indeterminazione di Heisemberg ci dice che se conosciamo la posizione di una particella con accuratezza Δr allora il suo impulso ha una indeterminazione

$$\Delta p = \Big[\langle p^2\rangle - \underbrace{\langle p\rangle^2}_{=0}\Big]^{1/2} \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta r} \Rightarrow p^2 \gtrsim \frac{\hbar^2}{(\Delta r)^2}$$

(mediamente fermo)

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \gtrsim \frac{\hbar^2c^2}{(\Delta r)^2}\cdot\frac{1}{2mc^2} \sim 10\ \text{MeV}$$

(B) I nucleoni all'interno del nucleo interagiscono. Esisterà quindi un contributo all'energia del sistema dovuto alle interazioni

- ES - Interazione elettromagnetica → Repulsione tra i due protoni

$$E_{coul} \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{\Delta r} = \frac{1.44\ MeV \cdot fm}{\Delta r} \sim MeV$$

- N.B. - Se ci fosse solo l'interazione elettromagnetica il nucleo non potrebbe essere stabile. Deve essere una interazione attrattiva (interazione forte) più intensa (nelle distanze piccole) che tiene insieme i nucleoni nel nucleo.

$$E_{strong} = ? \gtrsim MeV$$

$$E_{^3He}(p=0) = 2E_p(p=0) + E_n(p=0) + \underbrace{E_{kin} + E_{coul} + E_{strong}}$$

$$M(^3He)c^2 = 2M_pc^2 + M_nc^2 - B_d$$

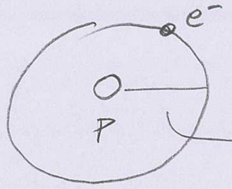
B_d = Energia legame = difetto di massa > 0 $\sim MeV$ } Altrimenti il nucleo non sarebbe stabile

N.B. $\frac{B_d}{M(^3He)c^2} \sim \frac{1\ MeV}{1\ GeV} \sim 10^{-3}$ per accorgerci del difetto di massa dobbiamo misurare le masse con una accuratezza dello 0.1 %

Perché non ci accorgiamo del difetto di massa negli atomi? $\left[\begin{array}{l} d_{ATOMO} = 1\ \text{Å} = 10^{-8}\ cm \\ d_{NUCLEO} = 1\ fm = 10^{-13}\ cm \end{array}\right.$

Il ragionamento precedente vale per tutti i sistemi legati (es. atomi, molecole, etc.).

Perché non ci accorgiamo del difetto di massa di un atomo o di una molecola?



$$r_H \sim 1\,\mathring{A} = 10^{-8}\,cm = 10^{5}\,fm$$

- $$E_{kin} \cong \frac{p^2}{2\mu} = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{(\hbar c)^2}{r_H^2} \cdot \frac{1}{2m_e c^2} = \frac{4\; 10^{-6}\,MeV^2}{1\,MeV} \sim 4\,eV$$

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \simeq m_e$$

- $$E_{coul} \simeq -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_H} = \frac{1.44\,MeV\text{-}fm}{10^5\,fm} \sim 10\,eV$$

- $$(m_p + m_e)c^2 \cong m_p c^2 \cong 1\,GeV$$

$$\boxed{\frac{B_H}{(m_p + m_e)c^2} = 10^{-8}}$$

- ES - Considerando che nei processi chimici (interazioni elettromagnetiche) viene liberato circa $\Delta E/m = 1\,eV / 1\,amu$ ($1\,amu \doteq 1\,m_p \cong 1\,GeV$)
atomic mass unit

mentre nelle reazioni nucleari viene liberato circa $\Delta E/m = 1\,MeV / 1\,amu$

(A) Quanto pesa una bomba nucleare in grado di sviluppare $1\,Mton \equiv$ equivalente energetico dell'esplosione di 10^6 tonnellate di tritolo ?

(B) Qual è la sorgente di energia del Sole ?

(B) Qual è la sorgente di energia del Sole?

Consideriamo che il Sole ha: massa $M_\odot \simeq 2 \cdot 10^{30}\,Kg = 2 \cdot 10^{33}\,g$

raggio $R_\odot \simeq 7 \cdot 10^{8}\,m = 7 \cdot 10^{10}\,cm$

temperatura sup − $T_{eff,\odot} \simeq 6 \cdot 10^{3}\,K$

temperatura centrale − $T_{c,\odot} \simeq 1.5 \times 10^{7}\,K$

Luminosità − $L_\odot = 3.85 \times 10^{33}\,erg \cdot s^{-1} = 3.85 \times 10^{26}\,W$

(energia emessa per unità di tempo)

→ Il Sole è fatto prevalentemente di idrogeno ionizzato.

Quanti nuclei di idrogeno (i.e protoni) ci sono nel Sole?

$$m_H = m_p + m_e \simeq m_p\left(1 + \frac{1}{2000}\right) \simeq m_p \simeq 1amu = 1.67 \times 10^{-27}\,Kg = $$
$$= 1.67 \times 10^{-24}\,g =$$
$$\simeq 0.938\ GeV/c^2$$

$$N_p = \frac{M_\odot}{m_p} = \frac{2 \times 10^{30}\,Kg}{1.67 \times 10^{-27}\,Kg} \simeq 1.2 \times 10^{57}$$

→ Esprimo la luminosità del sole in MeV/year −

$$1\ year = 365 \times 24 \times 60 \times 60 \simeq 3.14 \times 10^{7}\,s$$

$$1\ joule = \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}}\,eV \simeq 0.6 \times 10^{19}\,eV = 0.6 \times 10^{13}\,MeV$$

$$L_\odot = 3.85 \times 10^{26}\,W = 3.85 \times 3.14 \times 10^{7} \times 0.6 \times 10^{13+26}\,MeV/year$$
$$\simeq 7 \times 10^{46}\,MeV/year$$

Consideriamo che il Sole ha un età $t_\odot \simeq 4.5 \cdot 10^{9}\,year$

$$\Delta E \sim L_\odot t_\odot \simeq 7 \times 10^{46}\,MeV/_{year} \cdot 4.5 \times 10^{9}\,year = 3 \times 10^{56}\,MeV$$

- L'energia emessa ΔE per particella (N_p = # particelle) presenti nel Sole è data da:

$$\frac{\Delta E}{N_p} = \frac{3 \times 10^{56}}{1.2 \times 10^{57}} \, MeV \sim \underline{\underline{0.25 \, MeV}}$$

Scala tipica delle reazioni nucleari - Questa quantità di energia può essere spiegata ipotizzando che parte dei protoni che costituiscono il sole siano stati coinvolti in reazioni nucleari con guadagno energetico dell'ordine di ~1 MeV

(N.B. - nelle reazioni chimiche il guadagno energetico è ~1eV)

Sono possibili altre sorgenti di energia?

- Energia termica (i.e. il Sole emette energia raffreddandosi)

$$E_T \simeq N_p K_B T_{c,\odot} \cong 10^{57} \cdot 10^{-3} MeV \cdot 1.5 \simeq 1.5 \times 10^{54} \, MeV \simeq (L_\odot t_\odot) \cdot 10^{-2}$$

$$K_B T_{c,\odot} = 0.03 \, eV \left(\frac{1.5 \times 10^7 \, K}{300 \, K} \right) \simeq 1.5 \times 10^{7-2-2} \, K = 10^3 \, eV$$

- Energia gravitazionale (i.e. il Sole emette energia contraendosi)

$$E_{grav} \sim \frac{G M_\odot^2}{R_\odot} \sim 2.4 \cdot 10^{54} \, MeV \cong (L_\odot t_\odot) \cdot 10^{-2}$$

- CONCLUSIONE - Se non ci fossero le reazioni nucleari il Sole non potrebbe essere stabile su tempi scala dell'ordine di $t_\odot \sim 4.5 \times 10^9$ year (richiesti per lo sviluppo del sistema solare e della terra) ma dovrebbe evolvere su tempi dell'ordine di 10^7 year.

Alcune considerazioni sulla fisica nucleare

Nucleo = sistema legato di protoni e neutroni

$$\begin{cases} A = \text{Num. massa atomica} = \text{numero di nucleoni (i.e. protoni e neutroni) nel nucleo} \\ Z = \text{Num. atomico} = \text{numero di protoni del nucleo} \\ N = A - Z = \text{numero di neutroni nel nucleo.} \end{cases}$$

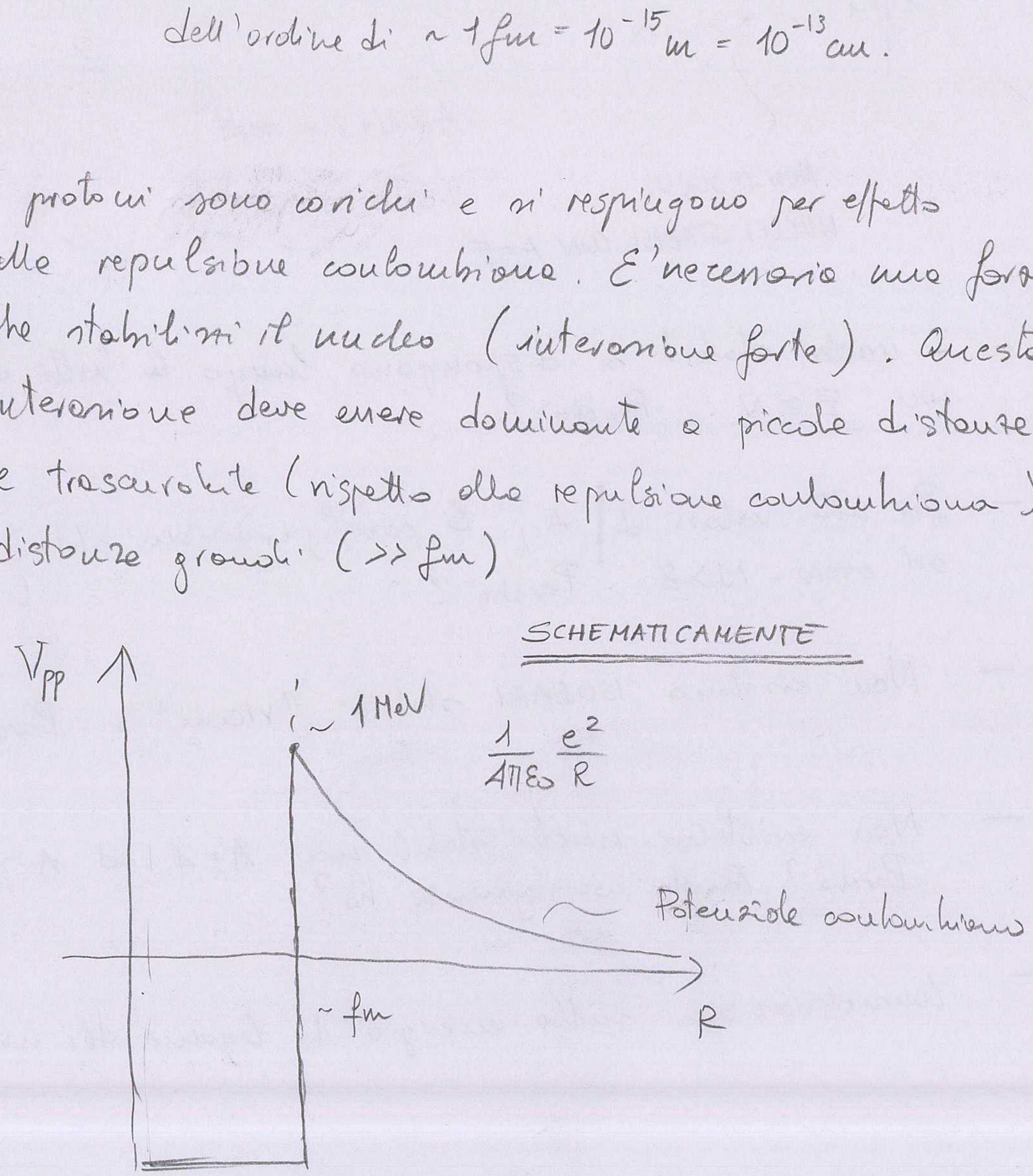
$$R_{NUCLEI} = (1.2\ fm)\,A^{-1/3} \longrightarrow d_{NUCLEONI} = \left[\frac{A}{V_{NUCLEO}}\right]^{-1/3} = \left[\frac{\cancel{A}}{\frac{4}{3}\pi(1.2\,fm)^{1/3}\cancel{A}}\right]^{1/3} =$$

Le distanze medie tra nucleoni è costante e dell'ordine di $\sim 1\,fm = 10^{-15}\,m = 10^{-13}\,cm$. $\Leftarrow$ costante ($\sim fm$)

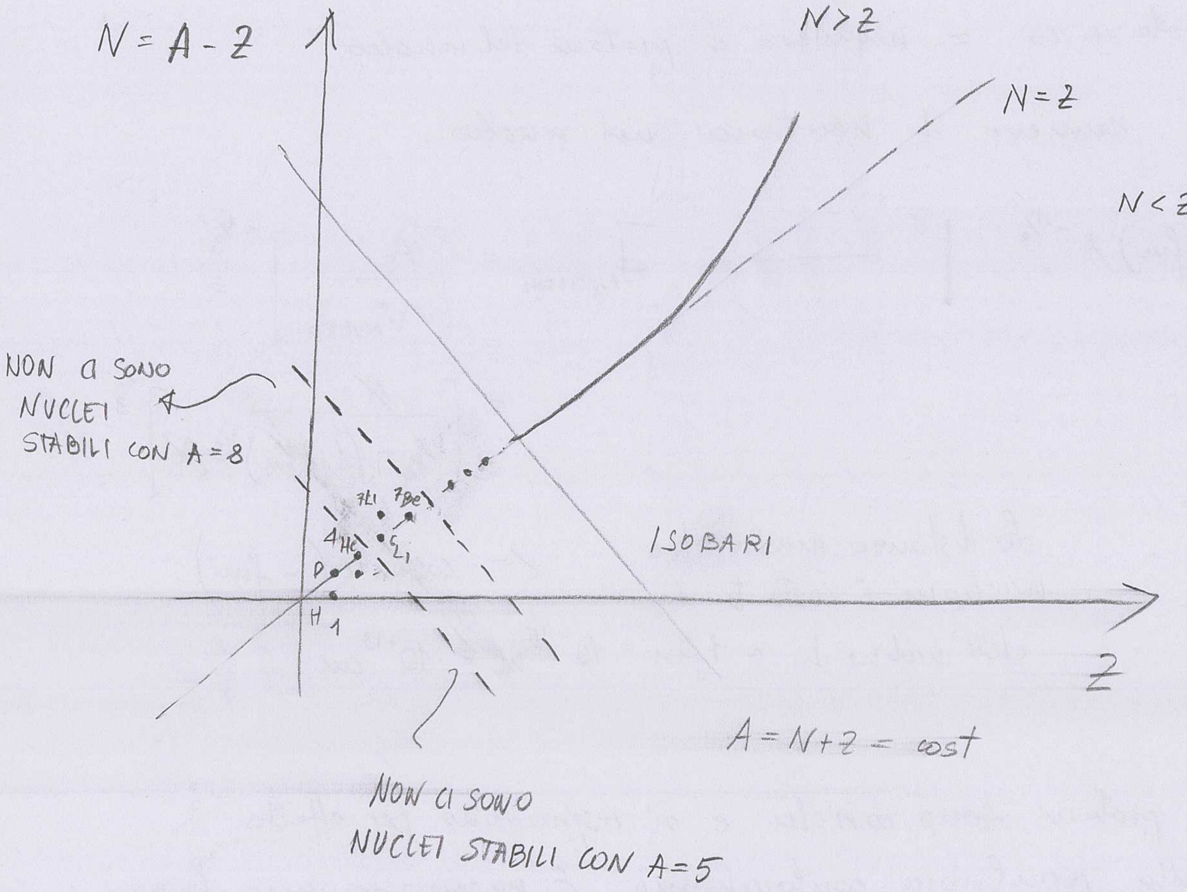
– N.B. – I protoni sono carichi e si respingono per effetto della repulsione coulombiana. È necessaria una forza che stabilizzi il nucleo (interazione forte). Questa interazione deve essere dominante a piccole distanze ($\lesssim fm$) e trascurabile (rispetto alla repulsione coulombiana) a distanze grandi ($\gg fm$)

Le interazioni forti tra nucleoni sono a corto raggio

SCHEMATICAMENTE



Possiamo trovare nuclei stabili con un numero arbitrario di protoni e neutroni? NO



(A) – I nuclei stabili si dispongono lungo la "valle di stabilità" con $Z \cong N$. Perchè?

(B) – Per alti valori di A, le configurazioni stabili tendono ad avere $N > Z$. Perchè?

(C) – Non esistono ISOBARI stabili "vicini". Perchè?

(D) – Non esistono nuclei stabili con A=4 ed A=8. Perchè? Quali conseguenze ha?

(E) – Considerazioni sulla energia di legame dei nuclei stabili

(A) I nuclei stabili si dispongono lungo la valle di stabilità con $Z \simeq N$. Perchè?

Le configurazioni stabili sono quelle che minimizzano l'energia di legame (vedi anche punto C e D). Il fatto che la natura sceglie $Z \simeq N$ ci dice qualcosa sulla natura delle interazioni forti.

Interazioni forti protone - protone = Interazioni forti protone - neutrone = Interazioni forti neutrone - neutrone

"Simmetria" delle interazioni forti per scambi $n \longleftrightarrow p$

$(n, p) \equiv$ nucleoni $\Rightarrow$ uguali dal punto di vista delle interazioni forti

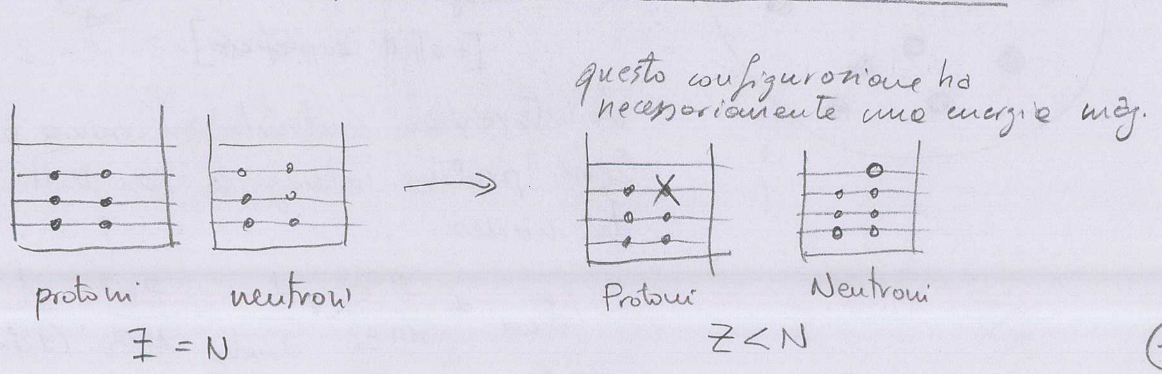
Se $|V_{nn}| > |V_{pp}|$, dovremmo avere nuclei fatti solo di neutroni

Se $|V_{pp}| > |V_{nn}|$, " " " " " di protoni

$\Rightarrow |V_{pp}| = |V_{nn}| = |V_{np}| \Rightarrow$ MA ALLORA: tutti gli ISOBARI dovrebbero avere lo stesso energia di legame (conta solo il numero totale di nucleoni)

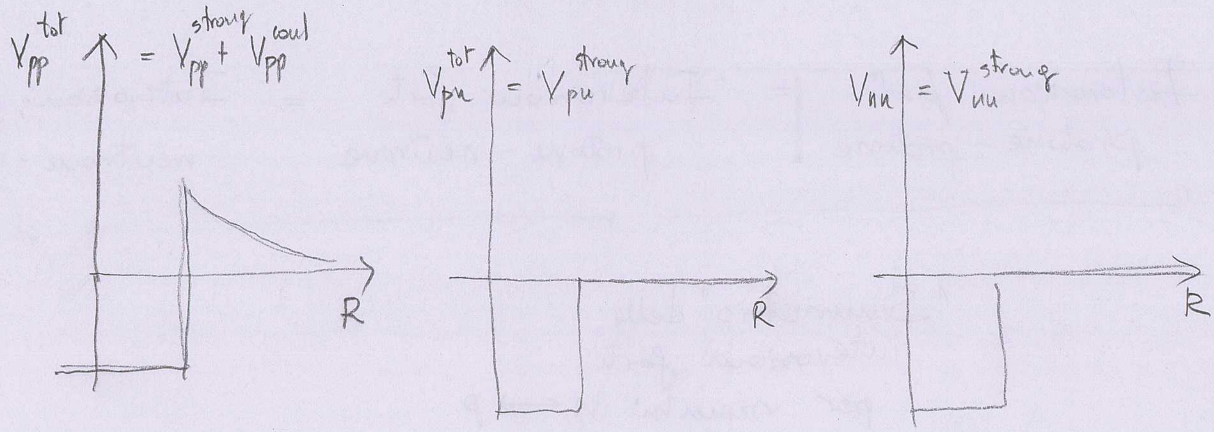
Perchè la natura sceglie $N \simeq Z$?

I protoni ed i neutroni sono fermioni di spin 1/2 ed obbediscono al principio di esclusione di Pauli



(B) Per alti valori di A, le configurazioni hanno $N > Z$.
Perché?

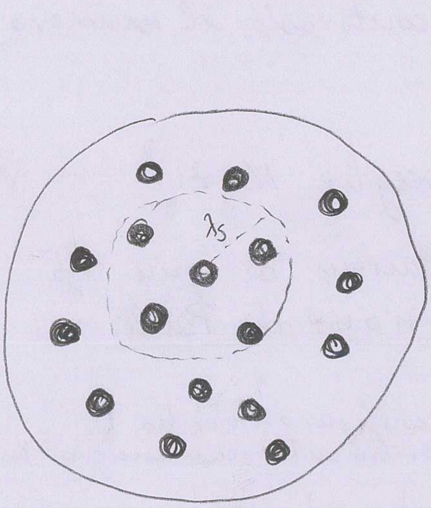
Dal ragionamento precedente dovrebbe seguire $Z \equiv N$ per tutti i valori di A – Abbiamo, però, trascurato l'effetto dell'interazione elettromagnetica.



La repulsione coulombiana è presente solo tra coppie di protoni e favorisca le configurazioni con $N > Z$

— CI CHIEDIAMO PERÒ: —

→ Perché l'effetto delle interazioni coulombiane è trascurabile per piccoli valori di A ed importante per grandi valori di A?



- Le interazioni forti sono a corto raggio λ_{strong}. Ogni nucleone sente solo l'effetto dell'interazione con i nucleoni vicini ($d < \lambda_{strong}$)

$$\Delta E_{Strong} = -A \cdot \text{cost} = -A\, K \cdot \rho_{nucl}\left(\frac{4}{3}\pi\lambda^3_{strong}\right) \propto A$$

[+ effetti superficie] $\qquad \rho_{nucl} = \text{cost}$

- Le interazioni coulombiane sono a lungo raggio. Ogni protone interagisce con tutti gli altri protoni del nucleo

$$\Delta E_{coul} \propto \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{d_{nucleo}} = \frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(1.2 fm) A^{1/3}} \overset{Z \simeq A/2}{\propto} A^{5/3}$$

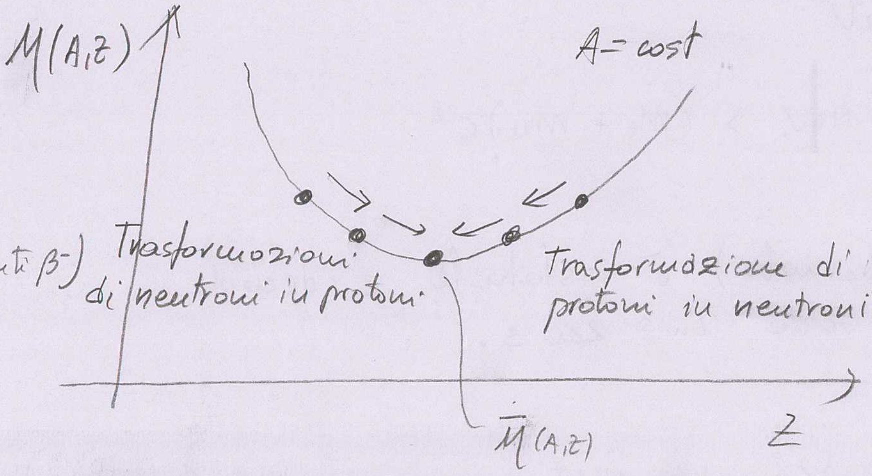
(c) Non esistono isobari vicini. Perché?

Per ogni valore di A fissato (A = numero totale di nucleoni), abbiamo che il nucleo stabile è quello più fortemente legato

$$m(A,Z) = m_p Z + m_n (A-Z) - \underbrace{\frac{B(A,Z)}{c^2}}$$ → energia di legame del nucleo

$$\mathcal{M}(A,Z) \equiv m(A,Z) + Z m_e$$ → massa atomica (trascuriamo le energie di legame degli elettroni)

(decadimenti β^-) Trasformazioni di neutroni in protoni



Trasformazione di protoni in neutroni (decadimenti β^+ e/o cattura elettronica)

Se viene formato un nucleo con $m(A,Z) > \bar{m}(A,Z)$, allora questo è instabile e decade "verso" il nucleo più stabilmente legato.

Ciò è possibile perché le interazioni deboli possono mediare processi:

PROCESSI β^- $\quad n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

PROCESSI β^+ $\quad p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e$

} decadimenti β

PROCESSI CATTURA ELETTRONICA $\quad e^- + p \longrightarrow n + \nu_e$

ν_e = neutrino elettronico $\qquad m_\nu = ? \leq 10^{-6}\, m_e$

$\bar{\nu}_e$ = antineutrino elettronico $\qquad Q_\nu = 0$ (PARTICELLA NEUTRA)

I processi avvengono in direzione "esoenergetica" (nel verso in cui il processo produce un rilascio di energia)

Es.

$$n \xrightarrow{?} p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\cancel{p \xrightarrow{?} n + e^+ + \nu_e}$$

$m_n c^2 = 939.6$ MeV

$m_p c^2 = 938.3$ MeV

$(m_n - m_p)c^2 = 1.29 \text{ MeV} > (m_e + m_\nu)c^2$

Il neutrone (nel vuoto) è instabile e decade con un tempo scala $\tau_n \cong 880$ s.

– N.B. –

$\Delta m_{np} c^2 \equiv (m_n - m_p) c^2 = 1.29$ MeV $\sim$ energie di legame nucleari

Ciò implica che i neutroni possono essere stabili nei nuclei

CONDIZIONI ENERGETICHE PER DECADIMENTI β^-, β^+ e PROCESSI DI CATTURA ELETTRONICA

$\mathcal{M}(A,Z) \equiv m(A,Z) + Z m_e$ $\qquad \mathcal{M} \equiv$ massa atomica

$p \to n$

DECADIMENTO β^+

$(A,Z) \to (A,Z-1) + e^+ + \nu_e$

$m(A,Z) > m(A,Z-1) + m_e \quad \longmapsto \quad m(A,Z) + Z m_e > m(A,Z-1) + (Z-1) m_e + 2 m_e$

$$\boxed{\mathcal{M}(A,Z) > \mathcal{M}(A,Z-1) + 2 m_e}$$

CATTURA ELETTRONICA

$e^- + (A,Z) \to (A,Z-1) + \nu_e$

$m(A,Z) + m_e > m(A,Z-1) \quad \longmapsto \quad m(A,Z) + (Z-1) m_e + m_e > m(A,Z-1) + (Z-1) m_e$

$$\boxed{\mathcal{M}(A,Z) > \mathcal{M}(A,Z-1)}$$

$n \to p$

DECADIMENTO β^-

$(A,Z) \to (A,Z+1) + e^- + \bar{\nu}_e$

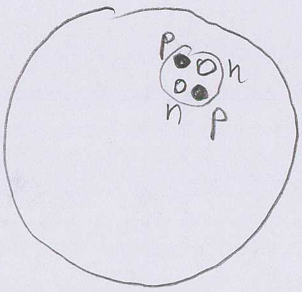
$m(A,Z) > m(A,Z+1) + m_e^- \quad \longmapsto \quad m(A,Z) + Z m_e > m(A,Z+1) + Z m_e + m_e$

$$\boxed{\mathcal{M}(A,Z) > \mathcal{M}(A,Z+1)}$$

(D) Non esistono nuclei stabili con $A=5$ ed $A=8$

Esistono configurazioni di nucleoni particolarmente stabili
(chiusure di "shells" – come avviene per gli elettroni negli atomi.
Una di queste configurazione è la "PARTICELLA α = nucleo di ^4He"

$$A=4$$
$$Z=2$$
$$N=2$$



I nuclei tendono a rompersi emettendo
PARTICELLE α $\longleftrightarrow$ DECADIMENTI α

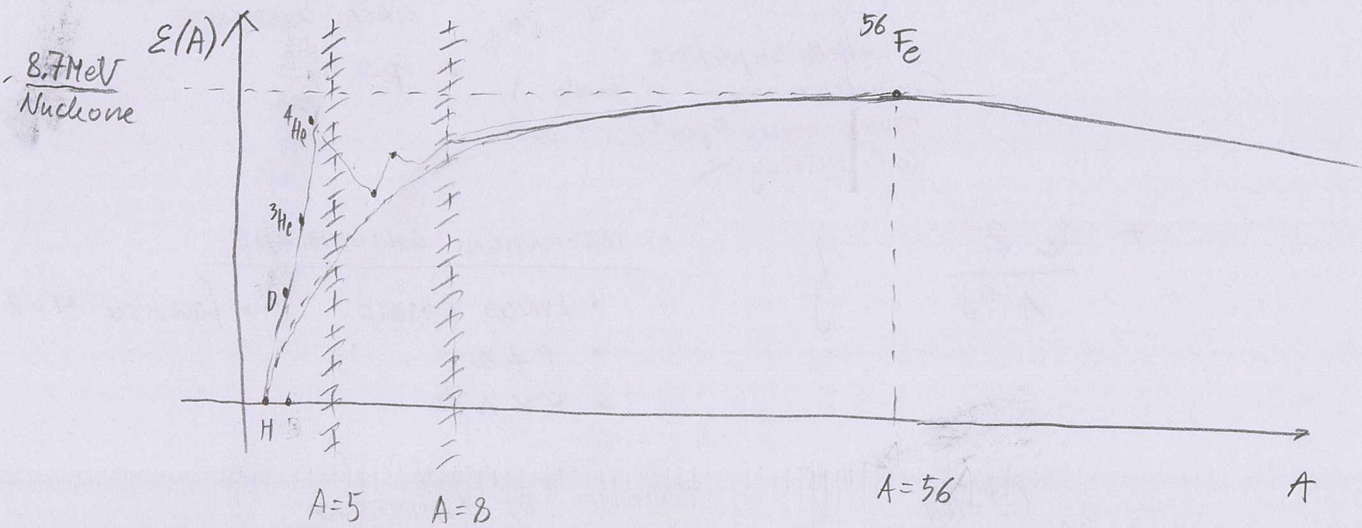
Se formiamo un nucleo $A=5$, questo si rompe immediatamente in $A=4$ + $A=1$; un nucleo $A=8$ si rompe in due nuclei con $A=4$

→ CONSEGUENZE PER ASTROFISICA E COSMOLOGIA

(E) Energia di legame per nucleone (di nuclei stabili)

$$M(A,Z) \equiv Z m_p + (A-Z) m_N - \frac{B(A,Z)}{c^2}$$

$$\mathcal{E}(A) \equiv \frac{B(A,Z)}{A} = \text{energia di legame per nucleone}$$



Notiamo che:

— Andamento più irregolare per valori piccoli di A.
Legato a come si distribuiscono protoni e neutroni tra i possibili stati quantistici ("shell").
Il nucleo di ^4He corrisponde ad un massimo locale di $\mathcal{E}(A)$ pari a circa 7 MeV/nucleone.

— Andamento regolare per valori di A intermedi e grandi.
Esiste un massimo per la funzione $\mathcal{E}(A)$

$$\mathcal{E}^{MAX}(A) \cong 8.7 \text{ MeV/Nucleone}$$

$A_{max} = 56 \longleftrightarrow {}^{56}Fe$ = NUCLEO PIÙ FORTEMENTE LEGATO ESISTENTE IN NATURA.

L'andamento della funzione $\varepsilon(A) \equiv B(A,Z)/A$ può essere spiegato qualitativamente dalle considerazioni precedentemente discusse

FORMULA SEMI-EMPIRICA DI MASSA

...come una "goccia" di liquido...

$$B(A,Z) = \overbrace{a_V A - \underbrace{a_S A^{2/3}}_{\text{effetti superficie}} +}$$

effetti superficie (i nucleoni vicini al bordo) hanno meno "partner" con cui interagire

INTERAZIONI FORTI:

- CORTO RAGGIO
- DISTANZA TRA NUCLEONI CIRCA COSTANTE
- $p \cong n$

$$+ \frac{a_C Z^2}{A^{1/3}}$$

INTERAZIONI COULOMBIANE

- LUNGO RAGGIO
- $p \neq n$
- $R \propto A^{1/3}$
- favorisce $N > Z$

$$- a_A \frac{(Z-N)^2}{A}$$

TERMINE DI ASIMMETRIA

- PRINCIPIO DI ESCLUSIONE DI PAULI
- favorisco configurazioni $Z = N$

$$+ \ldots$$

REAZIONI NUCLEARI

- E' possibile che i nuclei "reagiscono" attraverso processi di:

$$\text{FUSIONE}^{(*)}: \quad (A_1, Z_1) + (A_2, Z_2) \longrightarrow (A_1+A_2, Z_1+Z_2)$$

$$\text{FISSIONE}^{(*)}: \quad (A_1+A_2, Z_1+Z_2) \longrightarrow (A_1, Z_1) + (A_2, Z_2)$$

Quali condizioni devono verificarsi affinché questi processi rilascino energia?

FUSIONE:

$$M(A_1,Z_1) + M(A_2,Z_2) > M(A_1+A_2, Z_1+Z_2)$$

$$\cancel{(A_1-Z_1)M_n} + \cancel{Z_1 M_p} - \frac{B(A_1)}{c^2} + \cancel{(A_2-Z_2)}M_n + \cancel{Z_2 M_p} - \frac{B(A_2)}{c^2} >$$
$$\cancel{(A_1+A_2-Z_1-Z_2)M_n} + \cancel{(Z_1+Z_2)M_p} - \frac{B(A_1+A_2)}{c^2}$$

$$B(A_1+A_2) > B(A_1) + B(A_2)$$

$$\varepsilon(A_1+A_2)\cdot(A_1+A_2) > \varepsilon(A_1)\cdot A_1 + \varepsilon(A_2)\cdot A_2$$

Notiamo che se la funzione $\varepsilon(A)$ è CRESCENTE:

$$\varepsilon(A_1+A_2) > MAX\left[\varepsilon(A_1), \varepsilon(A_2)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon(A_1+A_2)\cdot(A_1+A_2) > MAX\left[\varepsilon(A_1),\varepsilon(A_2)\right]\cdot(A_1+A_2) > \varepsilon(A_1)\cdot A_1 + \varepsilon_2(A_2)\cdot A_2$$

$$\Downarrow$$

Possiamo produrre energia $\sim\left(\frac{\text{qualche MeV}}{\text{Nucleone}}\right)$ fondendo nuclei leggeri

---

(*) Possono eventualmente essere accompagnati da altre particelle nello stato iniziale e finale

FISSIONE :

$$m(A_1+A_2, Z_1+Z_2) > m(A_1, Z_1) + m(A_2, Z_2)$$

$$\cancel{m_n(A_1+A_2-Z_1-Z_2) + m_p(Z_1+Z_2)} - \frac{B}{c^2}(A_1+A_2) >$$
$$\cancel{m_n(A_1-Z_1) + m_p Z_1} - B(A_1) + \cancel{m_n(A_2-Z_2) + m_p Z_2} - \frac{B(A_2)}{c^2}$$

$$B(A_1) + B(A_2) > B(A_1+A_2)$$

$$\varepsilon(A_1)\cdot A_1 + \varepsilon(A_2)\cdot A_2 > \varepsilon(A_1+A_2)\cdot(A_1+A_2)$$

Se la funzione $\varepsilon(A)$ è decrescente :

$$\varepsilon(A_1+A_2) < Min[\varepsilon(A_1), \varepsilon(A_2)]$$
$$\Downarrow$$
$$\varepsilon(A_1)\cdot A_1 + \varepsilon(A_2)\cdot A_2 > Min[\varepsilon(A_1), \varepsilon(A_2)](A_1+A_2) > \varepsilon(A_1+A_2)\cdot(A_1+A_2)$$
$$\Downarrow$$

Possiamo produrre energia dalla fissione di nuclei pesanti ($\lesssim \frac{MeV}{nucleone}$)

FUSIONE	FISSIONE
• Nuclei leggeri	• Nuclei pesanti
• $\simeq$ qualche $\frac{MeV}{nucleone}$	• $\lesssim \frac{MeV}{nucleone}$
• NO prodotti radioattivi	!! • prodotti radioattivi (i nuclei pesanti sono ricchi di protoni)
$\Downarrow$ MA: dobbiamo portare due nuclei sufficientemente vicini ($d \sim 1$ fm) per farli reagire	• possiamo indurla e controllarla

LA FUSIONE PUÒ AVVENIRE NELLE STELLE:

Ad esempio, nel Sole:

$$\boxed{4p + 2e^- \longrightarrow {}^4He + 2\nu_e + Q} \quad (*)$$

$$Q = 26.7 \text{ MeV}$$

In realtà, il processo (*) avviene attraverso una catena di reazioni più semplici. Il principale meccanismo nel Sole è:

CATENA PP I

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e \qquad p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$$
$$d + p \rightarrow {}^3He + \gamma \qquad d + p \rightarrow {}^3He + \gamma$$
$$^3He + {}^3He \longrightarrow {}^4He + 2p$$

N.B.
I positroni prodotti nella reazione pp annichilano con gli elettroni nel mezzo:
$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

ESERCIZIO

L'energia emessa dal sole nell'unità di tempo (Luminosità) è uguale alla energia prodotta nell'unità di tempo dalle reazioni nucleari (*).
Sapendo che la luminosità è pari ad $L = 3.85 \times 10^{26}$ W $\cong 7 \times 10^{46}$ MeV/year e che ogni volta che avviene il processo (*) viene liberata una quantità di energia $Q = 26.7$ MeV, calcolare:

- Quanti nuclei di elio-4 vengono prodotti ogni anno nel Sole;
- Quanti protoni (i.e. nuclei di idrogeno) vengono consumati nel Sole;
- Quanto tempo impiegherà il Sole (se mantenesse la sua luminosità costante) ad esaurire l'idrogeno ($M_\odot \cong 2 \cdot 10^{30}$ Kg - si assuma che sia inizialmente composto solo da idrogeno);
- Qual è il flusso di neutrini prodotto dal sole sulla terra (si consideri che la distanza Sole-Terra è pari a 1 U.A. = 1.495×10^8 Km;
- Qual è la relazione tra il flusso di radiazione e.m. prodotto dal Sole sulla Terra ed il flusso di neutrini.

$L_\odot \cong 7 \times 10^{46}$ MeV/year — consumo energetico

- Per ogni nucleo di elio-4 prodotto, viene liberata una energia $Q = 26.7$ MeV

$$\frac{dN_{He}}{dt} = \frac{L_\odot}{Q} = \frac{7 \cdot 10^{46} \text{ MeV/year}}{26.7 \text{ MeV}} \cong 2.6 \cdot 10^{45} \text{ year}^{-1}$$

– N.B. –
$$Q = (4m_p + 2m_e - m_{^4He})c^2$$
$$= (4m_p + 2m_e - 2m_p - 2m_n)c^2 + B(^4He)$$
$$= \underbrace{2(m_p - m_n)c^2}_{-2 \times 1.3 \text{ MeV}} + \underbrace{2m_e c^2}_{1 \text{ MeV}} + \underbrace{\varepsilon(^4He) \cdot 4}_{\sim \frac{7 \text{ MeV}}{\text{Nucleone}} \times 4}$$

- Per ogni nucleo di elio-4 vengono consumati 4 nuclei di idrogeno:

$$\frac{dN_H}{dt} = -4\frac{dN_{He}}{dt} \simeq -10^{46} \text{ year}^{-1}$$

Se ipotizziamo che il sole sia prevalentemente composto da idrogeno:

$$N_H = \frac{M_\odot}{m_p} \sim 1.2 \times 10^{57}$$

- Per esaurire l'idrogeno:

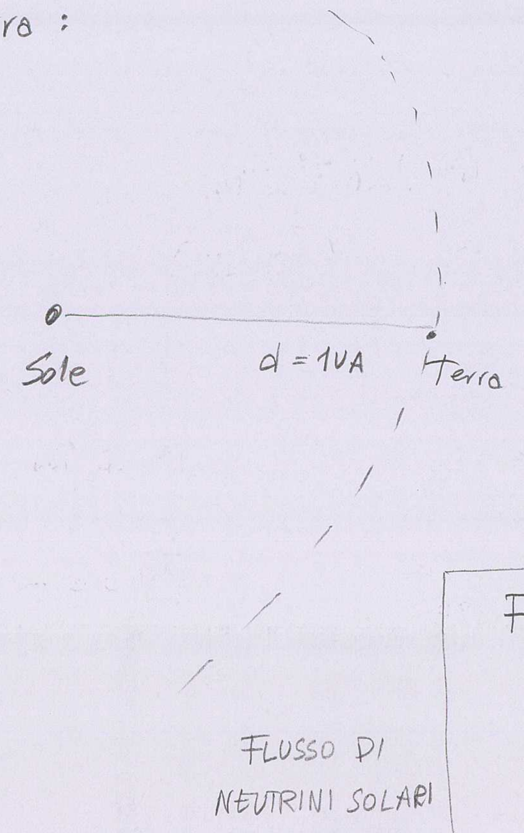
$$\left|\frac{dN_H}{dt}\right| \cdot t_{esaur} = N_H \longrightarrow t_{esaur} = \frac{N_H}{\left|\frac{dN_H}{dt}\right|} = \frac{1.2 \times 10^{57}}{10^{46}} \text{ year} \cong 10^{11} \text{ year}$$

– N.B. – In realtà la combustione avviene solo al centro (e quindi coinvolge l'idrogeno presente al centro del Sole). Per esaurire l'idrogeno al centro sono necessari 10^{10} year.

- Per ogni nucleo di elio-4 prodotti, vengono emessi 2 neutrini:

$$\frac{dN_\nu}{dt} = 2\,\frac{dN_{He}}{dt} = 2\,\frac{L_\odot}{Q}$$

Questi neutrini escono dal Sole senza interagire e raggiungono la Terra:



L'emissione di neutrini è isotropa. Quindi

$$F_\nu \cdot 4\pi d^2 = \frac{dN_\nu}{dt}$$

$$F_\nu = \frac{dN_\nu}{dt} \cdot \frac{1}{4\pi d^2} = \frac{2}{4\pi d^2}\,\frac{L_\odot}{Q}$$

$$F_\nu = \frac{2 \cdot 2.6 \times 10^{45}}{4\pi \cdot (1.5)^2 \cdot 10^{15}}\ \text{year}^{-1}\,\text{Km}^{-2}$$

$$= 1.8 \cdot 10^{28}\ \text{year}^{-1}\,\text{Km}^{-2}$$

$$= \frac{1.8}{3.14} \cdot 10^{28-7-10} \cong 6 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^{-2}\,\text{s}^{-1}$$

- Consideriamo che:

$$F_\nu = \frac{2}{Q}\left(\frac{L_\odot}{4\pi d^2}\right) = \frac{2}{Q}\,F_{e.m.}$$

$\downarrow$

Questa quantità è il flusso di energia elettromagnetica (se trascuriamo l'energia portata via dai neutrini) sulla superficie terrestre.

COME È POSSIBILE CHE LA FUSIONE AVVENGA NEL SOLE?

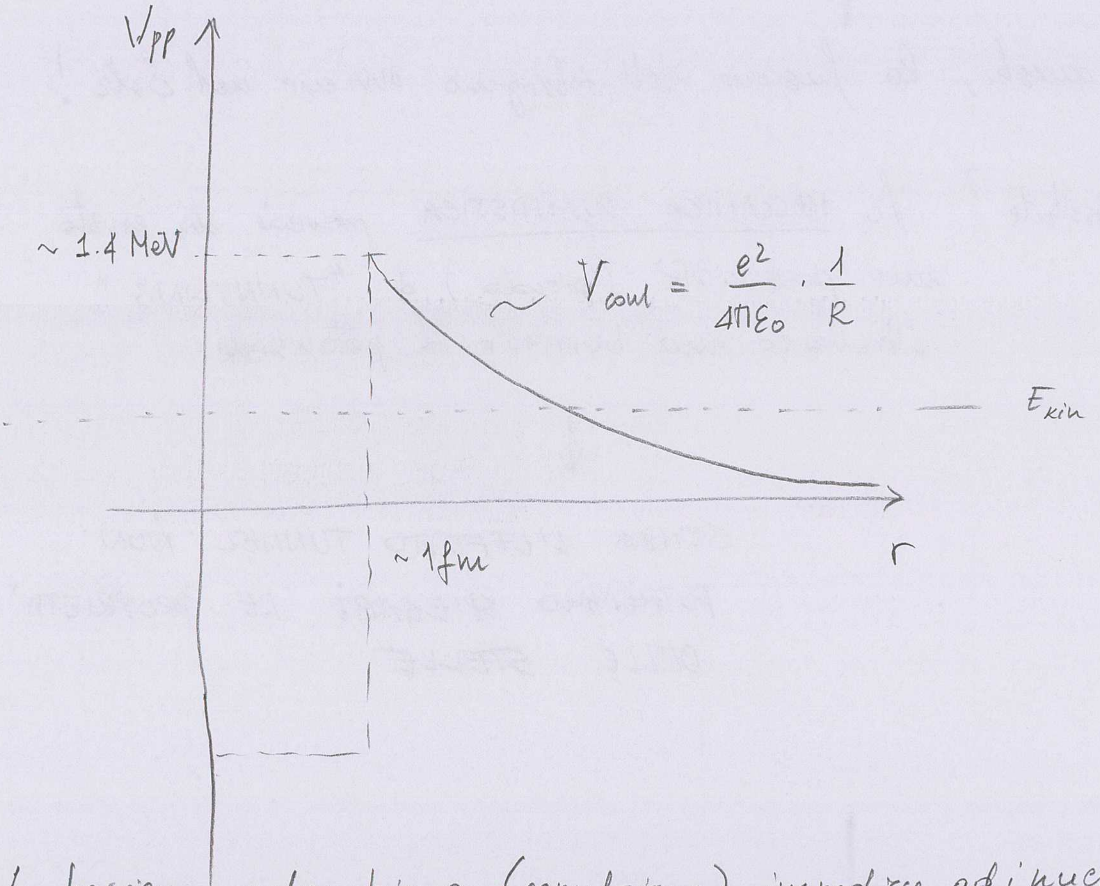
.. o anche ..

PERCHÈ I NUCLEI LEGGERI NON FONDONO "SPONTANEAMENTE"?

Es.

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$$

Le interazioni forti "dominano" a piccole distanze:



- La barriera coulombiana (repulsione) impedisce ai nuclei di avvicinarsi ($d \lesssim 1$ fm) e sentire le interazioni forti;

- CLASSICAMENTE - Se l'energia della collisione $E_{kin} \lesssim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{(1\,fm)}$ la reazione non può avvenire

- Qual è l'energia di collisione di due protoni nel Sole? Possiamo stimarla sapendo che la temperatura centrale del Sole è pari a $T_{cent,\odot} \cong 1.5 \times 10^7$ K

$$E_{kin} \sim \frac{3}{2} K_B T_{c,\odot} \sim \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{40} eV\right) \cdot \left(\frac{T_{c,\odot}}{300}\right) = \frac{1.5}{2} \cdot \frac{1}{40} eV \cdot \frac{\cancel{3}\times 10^{\cancel{7}\,5}}{\cancel{3\times 10^2}} \sim 2 \cdot 10^3 eV$$

$$K_B(T = 300 K) = \frac{1}{40} eV$$

– NOTARE – l'energia di collisione $E_{kin} \cong 2 \cdot 10^3$ eV è molto minore della energia necessaria per superare <u>CLASSICAMENTE</u> la barriera coulombiana $E_{coul} \sim \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1 fm} \sim 10^6 eV$

Nonostante questo, la fusione dell'idrogeno avviene nel Sole!

Come è possibile? La <u>MECCANICA QUANTISTICA</u> prevede che esista una possibilità (piccola) di "TUNNELING" attraverso una barriera di potenziale

↓

SENZA L'EFFETTO TUNNEL NON POTREMMO SPIEGARE LE PROPRIETÀ DELLE STELLE