

Introduzione

Questi appunti riassumono gli argomenti trattati in aula durante le lezioni di elettromagnetismo per il Gran Sasso - South Dakota - Princeton Summer School, edizione 2009, tra il 27 e il 31 Luglio 2009.

Le lezioni (circa 10 ore in aula) sono sempre state accompagnate da dimostrazioni in aula che, spero, siano servite a migliorare la comprensione dei fenomeni fisici discussi. Queste dimostrazioni, svolte anche nelle edizioni precedenti, sono state possibili grazie al fondamentale aiuto di Fred Loeser che ringrazio. La lista di queste dimostrazioni è riportata nell'ultima pagina di questi appunti. Inoltre è stata svolta una prova di laboratorio, con preparazione di una relazione, sulla misura del rapporto e/m degli elettroni (la spiegazione di questa prova si trova in appunti dell'Università di Princeton, distribuita agli studenti il giorno della prova).

Questi appunti servono unicamente come traccia degli argomenti trattati. Sicuramente non sono esaustivi e non esauriscono gli argomenti trattati. Bisogna considerare che per questi argomenti, in un corso universitario di fisica del 2° anno della laurea di 1° livello in Fisica, sono necessarie circa 100 ore di lezione. Analogamente coprono gli argomenti trattati durante tutto l'ultimo anno della scuola superiore.

Lo scopo delle lezioni era principalmente di introdurre gli argomenti principali dell'elettromagnetismo, mostrare le equazioni di Maxwell e il loro significato, in modo da arrivare a mostrare, nell'ultima lezione, gli esperimenti che all'inizio del secolo XX, anno portato alla crisi della fisica classica e allo sviluppo della meccanica quantistica. Per alcuni argomenti, come le equazioni di Maxwell, anche se il formalismo matematico è molto avanzato, si è scelto comunque di mostrarli, per discutere anche dell'importanza della matematica nella fisica, e di commentarne il significato.

Gli studenti che volessero approfondire gli argomenti trattati possono utilizzare testi di Fisica della scuola superiore, come:

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fondamenti di Fisica: Onde; Zanichelli;

D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Fondamenti di Fisica: Elettromagnetismo; Zanichelli

Molti argomenti trattati in questi appunti, e quindi anche il formalismo, sono stati presi da un testo universitario:

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci, FISICA (vol. 2); EdiSES

Mi scuso in anticipo della presenza quasi inevitabile di errori ed imprecisioni. Vi prego di segnalarmeli.

Tortoreto (TE) Settembre 2009

Dott. Luca Lozzi

Dipartimento di Fisica
Università degli Studi dell'Aquila
e-mail: luca.lozzi@aquila.infn.it

Elettrostatica

Forza di Coulomb: forza esercitata tra due cariche, q_1 e q_2 , distanti r :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r$$

\hat{u}_r rappresenta il versore (vettore di lunghezza unitario) del vettore posizione \vec{r} .

ϵ_0 è detta costante dielettrica del vuoto e vale $8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$, essendo C=Coulomb l'unità di misura della carica elettrica (la carica di un elettrone, e^- , vale 1.6×10^{-19} C).

Se le cariche si trovano in un mezzo che non è il vuoto (o l'aria) al posto di ϵ_0 andrà messa $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, dove ϵ è la costante dielettrica del mezzo e ϵ_r è detta costante dielettrica relativa.

Questa forza è diretta lungo la retta su cui giacciono le due cariche ed è attrattiva se le due cariche hanno segno opposto (una positiva ed una negativa). E' invece repulsiva se sono cariche dello stesso segno (entrambe positive o negative).



Se sono presenti più cariche elettriche vale il principio di sovrapposizione, ovvero la forza esercitata sulla n-esima carica sarà data dalla somma (vettoriale!) delle forze esercitate dalle n-1 cariche:

$$\vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{F}_i$$

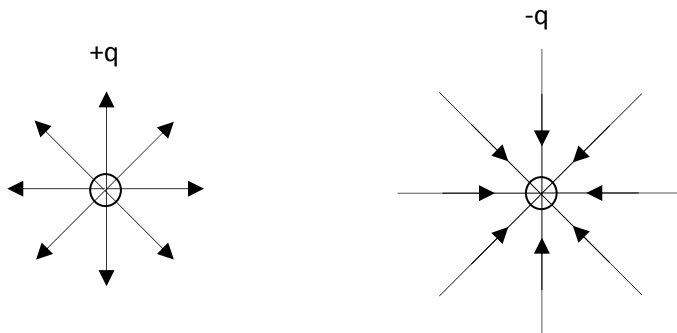
Campo elettrico: si introduce il campo elettrico (\vec{E}) come "qualche cosa" generato, nel punto P, dalla presenza di cariche elettriche, ed è definito come:

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

dove q_0 è definita la carica (positiva) di prova (o sonda) e \vec{F} è la forza che si eserciterebbe su q_0 per effetto delle altre cariche che determinano \vec{E} nel punto P.

Il campo elettrico (come tutti i campi in fisica, come per esempio gravitazionale o magnetico) si rappresenta utilizzando il concetto di linee di forza, cioè delle linee orientate che visualizzano la direzione e il verso di un campo. Queste sono linee tangenti in ogni punto al campo e la loro densità è collegata all'intensità del campo, cioè maggiore è la densità delle linee maggiore sarà l'intensità del campo. Pertanto il campo elettrico generato da una carica positiva (+q) è un campo centrale, cioè diretto dalla carica verso

l'esterno, mentre quello generato da una carica negativa (-q) è sempre centrale ma il verso è entrante, cioè "verso" la carica elettrica che determina il campo.



Anche per il campo elettrico (misurato in Newton/Coulomb, N/C) vale il principio di sovrapposizione:

$$\vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{E}_i$$

essendo \vec{E}_i il campo generato nel punto P dalla carica i-esima.

Nel caso di una distribuzione continua di cariche si passa all'uso degli integrali:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r$$

Esempio: campo elettrico generato da una distribuzione lineare omogenea di carica positiva totale Q, di lunghezza 2L, in un punto P a distanza D lungo la mediana del filo:

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{u}_r$$

campo elettrico elementare dovuto alla carica dq posta sull'elemento di filo di lunghezza dy.

Se Q = carica totale sul filo, $\lambda = \frac{Q}{2L}$ è la densità lineare di carica. Pertanto la carica elementare dq sarà data da: densità di carica x lunghezza:

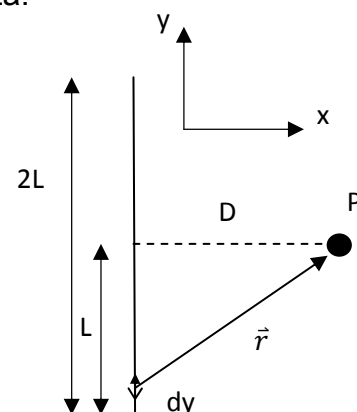
$$dq = \lambda dy$$

Integrando il campo su tutta la lunghezza del filo,

il campo in P è dato da:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{D} \frac{1}{\sqrt{L^2 + D^2}} \hat{u}_x$$

dove \hat{u}_x è il versore lungo la direzione x.



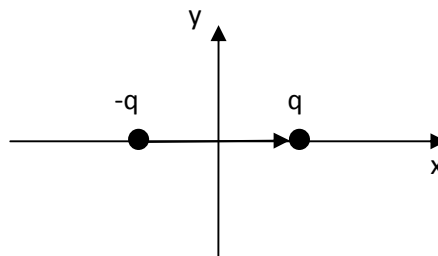
Il campo sarà uscente dal filo se la carica è positiva e sarà entrante verso il filo se la carica è negativa.

Se $L \gg D$ (filo infinito):

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{D} \hat{u}_x$$

Dipolo: coppia di cariche uguali ma di segno opposto, poste a distanza d (fissa):

$$\vec{p} = q \vec{d}$$



dove \vec{d} è il vettore distanza tra le due cariche e va dalla carica negativa a quella positiva.

Il dipolo è importante per spiegare l'interazione tra molecole (es acqua), in quanto le molecole che presentano un dipolo diverso da zero generano intorno a se un campo elettrico e possono interagire con altre molecole aventi un dipolo (interazione dipolo-dipolo). Il campo elettrico generato da un dipolo varia come $1/r^3$, cioè va a zero più velocemente del campo determinato da una singola carica (che varia come $1/r^2$). Questo fa sì che l'effetto di un dipolo è a più corto raggio di quello di una carica singola (l'interazione tra due dipoli è importante quando sono molto vicini).

Potenziale elettrico: il campo elettrostatico è conservativo cioè il lavoro fatto dal campo elettrostatico per spostare una carica elettrica tra due punti è indipendente dal percorso fatto dalla carica per andare dal punto iniziale a quello finale. Pertanto si può definire un'energia potenziale, U , tale che si possa scrivere la conservazione dell'energia:

$E = E_k + U$, essendo E = energia totale e E_k = l'energia cinetica.

Se il campo elettrico sposta una carica dal punto A al punto B:

$$E_k(A) + U(A) = E_k(B) + U(B), \text{ pertanto } \Delta E_k = E_k(B) - E_k(A) = - (U(B) - U(A)) = - \Delta U$$

essendo $\Delta U = U(B) - U(A)$.

Poichè il lavoro W , dal teorema dell'energia cinetica, è uguale alla variazione dell'energia cinetica, si ha che:

$$W = \Delta E_k = - \Delta U.$$

Analogamente al concetto di campo elettrico, cioè la forza per unità di carica, si definisce il potenziale elettrostatico V come l'energia potenziale per unità di carica:

$$V = \frac{U}{q_0}$$

Questo equivale a definire la differenza di potenziale tra due punti A e B:

$$V(A) - V(B) = -\frac{U(B) - U(A)}{q_0} = \frac{W}{q_0} = \frac{\int_A^B \vec{F} \cdot \overline{ds}}{q_0} = \int_A^B \vec{E} \cdot \overline{ds}$$

essendo $W = \int_A^B \vec{F} \cdot \overline{ds}$ il lavoro compiuto dalla forza F durante il percorso da A a B.

Da questa definizione si ha che, nel caso di una carica puntiforme q , il potenziale nel punto P a distanza r dalla carica che genera il campo è dato da:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{cost}$$

dove la costante indica il fatto che il potenziale in un punto è riferito rispetto al potenziale in un punto di riferimento. Se si pone uguale a zero il potenziale elettrostatico all'infinito ($V(\infty)=0$), allora il potenziale nel punto P è semplicemente:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Questa espressione indica il lavoro, per unità di carica, che è compiuto dal campo elettrostatico per portare la carica q_0 dal punto P all'infinito.

Il potenziale è misurato in Volt (V), $1V = 1J/1C$.

Con questa definizione si introduce l'unità di misura del campo elettrico: Volt/metro (V/m), più utilizzata rispetto a N/C precedentemente indicata.

Corrente elettrica

La corrente elettrica I è un flusso di cariche che si muovono “ordinatamente” per effetto di un campo elettrico.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

La corrente elettrica è definita come la carica dq che attraversa la sezione di un conduttore (reale o meno) nell'unità di tempo dt .

Dal punto di vista microscopico la densità di corrente, J , ovvero la corrente per unità di superficie del conduttore (S), si può determinare come:

$$J = \frac{I}{S} = nqv_d$$

essendo n = concentrazione di cariche (numero di cariche per unità di volume, N/V), q = carica elettrica, v_d = velocità di deriva, ovvero la velocità (media) che le cariche acquistano per effetto del campo elettrico esterno.

La corrente elettrica I si misura in Ampere (A):

1 Ampere = 1 Coulomb/1 secondo ($1A=1C/1s$)

Notare che:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad q\vec{E} = m\vec{a}, \quad \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

$$\vec{v}_d = \vec{v}_0 + \vec{a}t = \frac{q\vec{E}}{m} t \quad (\text{se } \vec{v}_0 = 0)$$

Pertanto la velocità di deriva \vec{v}_d è parallela al campo elettrico \vec{E} se la carica $q > 0$, è antiparallela a \vec{E} se la carica $q < 0$.

La corrente elettrica può essere dovuta a elettroni ($q < 0$) nei solidi (metalli), a cariche negative (elettroni) e positive (lacune) nei semiconduttori, a ioni nelle soluzioni (es Na^+ e Cl^-).

In un metallo la concentrazione n di cariche elettriche (elettroni) che partecipano alla conduzione può essere facilmente stimato, considerando che in ottimi conduttori (Ag, Cu, Au) circa 1 elettrone per atomo è coinvolto nella conduzione. Pertanto se N_A = numero di Avogadro (n. atomi per mole), A = massa molare (grammi/mole), ρ = densità di massa (grammi/cm³),

$$n = \frac{N_A \rho}{A}$$

Per esempio, il rame (Cu): $A=63.66$ g/mole, $\rho=8.96$ g/cm³, $N_A = 6.022 \times 10^{23}$, $n(\text{Cu})=8.5 \times 10^{22}$ elettroni/cm³.

La corrente elettrica è dovuta alla presenza di un campo elettrico che esercita una forza sulle cariche e le "mette" in movimento ordinato. Pertanto la densità di corrente J è collegata al campo elettrico E :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \text{ dove } \sigma \text{ è la conducibilità elettrica.}$$

In presenza di un campo elettrico costante le cariche non acquistano una velocità infinita (campo elettrico costante \rightarrow forza costante \rightarrow accelerazione costante \rightarrow velocità cresce con il tempo linearmente), ma raggiunge una velocità di regime. Pertanto esistono processi di attrito che determinano una dissipazione di energia. Quindi esiste una "resistenza" al moto degli elettroni. Questa resistenza nei solidi è dovuta principalmente all' "urto" delle cariche in movimento con gli ioni che formano il reticolo cristallino.

Legge di Ohm (per i metalli): $V = RI$

dove V = differenza di potenziale ai capi del conduttore, I = corrente che passa nel conduttore, R = resistenza elettrica. R si misura in Ohm (Ω): $1 \Omega = 1V/1A$.

La resistenza elettrica R di un conduttore dipende dalla sua lunghezza (l), dalla sezione (S) e dalla natura del conduttore stesso:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

dove ρ è chiamata resistività (misurata in Ohm x metro, Ωm) e il suo valore dipende dalla natura del conduttore e dalla sua temperatura (per i metalli, al crescere della temperatura, ρ aumenta perché aumentano gli urti tra le cariche che si muovono e gli ioni, nei semiconduttori accade il contrario ma per motivi diversi).

Valori tipici di ρ (a temperatura ambiente):

Cu: $1.78 \times 10^{-8} \Omega m$

Grafite: $1.4 \times 10^{-5} \Omega m$

Acqua (distillata): $2 \times 10^5 \Omega m$

Vetro: $10^{10} - 10^{14} \Omega m$

SiO₂: $10^{16} - 10^{18} \Omega m$

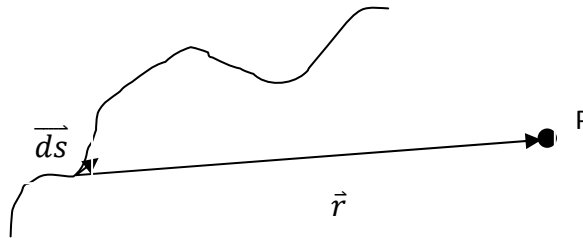
Vi sono dei casi in cui la relazione tensione-corrente (V-I) non è lineare (come nella legge di Ohm). Per esempio nel caso di alcuni dispositivi per la microelettronica (diodi: $I = I_0(e^{qV/kT} - 1)$) o nell'emissione di elettroni da un filamento caldo (legge di Richardson: $J = A T^2 e^{-W/kT}$).

Il campo magnetico

Le sorgenti del campo magnetico sono le correnti elettriche. Non esistono sorgenti "puntiformi" del campo magnetico (l'equivalente della carica elettrica per il campo elettrico), cioè non esiste il monopolo magnetico.

Il campo magnetico infinitesimo $d\vec{B}$ nel punto P generato dalla corrente i a distanza \vec{r} è dato da:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$



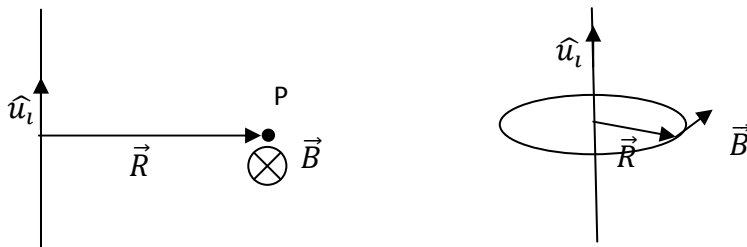
\hat{u}_r rappresenta il versore del vettore distanza \vec{r} dall'elemento di lunghezza $d\vec{s}$ del conduttore (reale o immaginario) in cui scorre la corrente i al punto P; la direzione e il verso sono quelli della corrente. Il campo magnetico totale \vec{B} si ottiene integrando l'espressione su tutta la lunghezza del conduttore. L'unità di misura del campo magnetico è il Tesla (T), quando la corrente si misura in Ampere (A) e la distanza in metri (m). Un'unità di misura spesso utilizzata è il Gauss (G), $1\text{T}=10^4\text{ G}$.

μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto e vale $4\pi \times 10^{-7}\text{ T m/A}$.

Questa equazione è detta legge di Biot-Savart (a volte nota come legge di Laplace).

Questa equazione è molto generale e può essere utilizzata per calcolare il campo magnetico generato da una qualunque corrente elettrica. In generale il calcolo del campo magnetico totale può essere molto complicato. Un caso molto semplice è quello che riguardano il campo magnetico generato da una corrente che scorre in un filo rettilineo infinitamente lungo. In questo caso le linee di forza formano delle circonferenze concentriche, nel cui centro si trova il filo e il verso è dato dalla regola del prodotto vettore dell'eq. di Biot-Savart. L'espressione analitica del campo generato nel punto P a distanza R dal filo è data da:

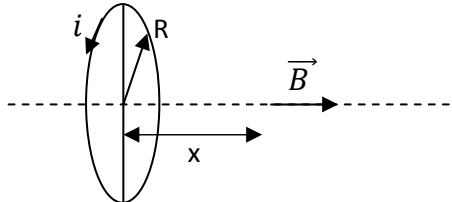
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{u}_l \times \hat{u}_R$$



dove \hat{u}_l è il versore della corrente e \hat{u}_R è il versore del vettore \vec{R} . Nel caso in figura il simbolo \otimes indica che il vettore B è entrante nel foglio.

Un altro esempio semplice è il caso del campo generato da una spira, cioè da un filo che forma un cerchio. In questo caso il campo B sull'asse di una spira, a distanza x dal centro di questa, di raggio R e percorsa dalla corrente i è dato da:

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



Un caso interessante è il campo magnetico generato da un solenoide, cioè da un conduttore avvolto e che forma N spire di raggio R . In questo caso il campo al centro del solenoide di lunghezza L e percorso da corrente i vale approssimativamente (cioè nel caso in cui $L \gg R$):

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} i = \mu_0 n i$$

Forza di Lorentz

Una carica elettrica q che si muove con velocità \vec{v} in una zona di spazio in cui è presente un campo magnetico \vec{B} è soggetto ad una forza, detta forza di Lorentz, data da:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Notare che, essendo la forza di Lorentz perpendicolare alla velocità (cioè alla traiettoria), questa forza non compie lavoro sulla carica q .

Applicazioni:

Spettrometro di massa: selezionatore di ioni di massa diversa. Gli ioni (che, per semplicità supponiamo abbiano la stessa carica elettrica q), accelerati da una differenza di potenziale, entrano in una zona in cui è presente un campo magnetico B perpendicolare al loro vettore velocità. Sono pertanto soggetti alla forza di Lorentz e compiono semicirconferenze. Il raggio di questa traiettoria si ottiene eguagliando la forza di Lorentz alla forza centripeta:

$$qvB = m \frac{v^2}{R} \quad R = \frac{m v}{q B}$$

Come si vede il raggio dipende dalla massa dello ione e questo permette di selezionare le masse degli ioni. Con un sistema simile è possibile determinare il rapporto q/m degli elettroni (esperienza fatta in laboratorio).

Ciclotrone: acceleratore di particelle. In questo caso le particelle cariche (per esempio elettroni) di massa m ruotano all'interno due semi-lune, di raggio R , immerse in un campo magnetico B perpendicolare alla superficie delle semi-lune. Le particelle sono iniettate con una velocità iniziale al centro di una delle due semi-lune. Percorrono, per effetto del campo B , una traiettoria semicircolare. Tra le due semi-lune è applicato una differenza di potenziale "sincronizzata" con la rotazione della particella, in modo che ogni volta la particella, passando da una semi-luna ad un'altra, sia accelerata. In questo modo le particelle aumentano la loro energia cinetica e, di conseguenza, il raggio della loro orbita. La velocità massima sarà:

$$v_{max} = \frac{q B R}{m}$$

Da notare che in assenza della differenza di potenziale tra le semi-lune le particelle cariche non aumenterebbero la loro velocità.

Legge di Faraday-Lenz:

possiamo generare una corrente elettrica i in un circuito chiuso avente resistenza R (come, per esempio una spira) se il flusso del campo magnetico che attraversa questo circuito cambia nel tempo.

Il flusso di un vettore \vec{B} , $\Phi(\vec{B})$, che attraversa una superficie delimitata da una linea chiusa è definito come:

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \cdot \vec{dA}$$

dove l'integrale è esteso su tutta la superficie. \vec{dA} è un vettore che rappresenta l'elemento di superficie, cioè un vettore che ha direzione perpendicolare alla superficie elementare (il verso è definito in maniera un po' complicata ma non ha interesse in questo contesto).

Nei casi più semplici la superficie è piana e il campo \vec{B} è costante su tutta la superficie. Pertanto il flusso si trasforma in:

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

dove \vec{A} è il vettore che rappresenta la superficie.

La legge di Faraday-Lenz stabilisce una relazione tra la variazione temporale del flusso $\Phi(\vec{B})$ del campo magnetico e la corrente elettrica che passa nel circuito chiuso avente resistenza elettrica R :

$$i = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

(In realtà nella legge di Faraday-Lenz si collega la variazione $\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ alla generazione di forza elettromotrice, grandezza collegata alla presenza di un campo elettrico non conservativo, e, successivamente alla corrente elettrica che passa nel circuito, come qui riportato).

Notare il segno – nell'equazione che è conseguenza della conservazione dell'energia.

La legge di Faraday-Lenz ci dice che possiamo generare corrente, per esempio, cambiando nel tempo l'orientazione tra il campo magnetico e la spira. Un esempio importante è la dinamo (lo strumento usato nelle biciclette, auto, centrali elettriche per generare corrente elettrica) in cui la spira (o meglio un insieme di spire) ruota per effetto di una forza meccanica (la rotazione di una ruota in una bicicletta, lo scorrere dell'acqua in una centrale idroelettrica, l'espansione di un vapore) all'interno di un campo magnetico costante. Se la spira ruota con velocità angolare costante ω la corrente sarà:

$$i = -\frac{1}{R} \omega BA \sin(\omega t)$$

essendo A l'area della spira.

Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell sono 4 equazioni che mettono in relazione i campi elettrici \vec{E} ed i campi magnetici \vec{B} con le sorgenti di questi campi, ovvero le cariche elettriche e le correnti elettriche. Inoltre mostrano come variazioni nel tempo di \vec{E} e \vec{B} possono a loro volta generare, rispettivamente, campi magnetici ed elettrici. Le equazioni sono scritte in forma derivata (cioè compaiono delle derivate) o in forma integrale (cioè compaiono degli integrali). Di seguito sono riportate le equazioni nelle due forme che valgono nel vuoto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi(\vec{B})}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \vec{I} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t} \qquad (4)$$

($\vec{\nabla} \times \vec{B}$ è anche detto rotore di \vec{B} abbreviato: $rot\vec{B}$)

Senza entrare nei dettagli:

$\vec{\nabla}$ è un vettore (nabla), $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$, per cui, per esempio:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$ è il prodotto scalare tra il vettore $\vec{\nabla}$ e il vettore \vec{E} ;
($\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ è anche detto "divergenza di \vec{E} ", abbreviato $div\vec{E}$)

$\frac{\partial}{\partial x}$ indica la derivata di una funzione (di più variabili) rispetto ad una solo di queste, per esempio rispetto ad x, considerando le altre variabili come costanti. E' detta derivata parziale;

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ indica un integrale su una superficie chiusa;

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ indica un integrale lungo una linea chiusa.

L'equazione (1) dice che le sorgenti del campo elettrico sono le cariche elettriche q (ρ rappresenta la densità di carica elettrica, cioè il numero di cariche elettriche per unità di volume, $\rho = \frac{q}{V}$). Nella forma integrale l'eq. 1 dice che il flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$) è uguale alla somma delle cariche elettriche (q) contenuta all'interno della superficie. E' anche detta legge di Gauss.

L'equazione (2) indica che non esistono singole sorgenti del campo magnetico, come le cariche elettriche, cioè non esistono i monopoli magnetici.

L'equazione (3) mostra che una variazione temporale del campo magnetico (in forma derivata) o del suo flusso attraverso una superficie (in forma derivata) determinano la presenza di un campo elettrico. La forma integrale non è altro che la legge di Faraday-Lenz. L'integrale $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ è calcolato lungo la linea che delimita la superficie attraverso la quale è calcolato il flusso del campo magnetico. Questo integrale è chiamato forza elettromotrice e mostra che il campo elettrico, generato dalla variazione del flusso di B, è non conservativo. Infatti questo integrale rappresenta il lavoro, per unità di carica, che il campo elettrico compie lungo una linea chiusa. Per un campo elettrostatico, cioè generato da cariche elettriche ferme, questo lavoro è zero, essendo il campo elettrostatico conservativo.

L'equazione (4) mostra che le sorgenti di un campo magnetico sono le correnti elettriche (o la densità di corrente J, cioè la corrente per unità di superficie) e le variazioni del campo elettrico (in forma derivata) o del flusso del campo elettrico (in forma integrale). Il termine $\epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t}$ è detto corrente di spostamento. Notare che ha le stesse dimensioni di una corrente elettrica.

Usando le equazioni di Maxwell è possibile calcolare il campo elettrico e/o magnetico conoscendo, per esempio, la distribuzione di carica elettrica o le correnti elettriche.

Onde elettromagnetiche

Un aspetto estremamente importante, forse il principale, delle equazioni di Maxwell è che le soluzioni di queste equazioni sono funzioni analitiche che descrivono la propagazione di "onde elettromagnetiche". Questo si può facilmente mostrare nel caso di un mezzo omogeneo di costante dielettrica ϵ_0 (come il vuoto) dove non sono presenti né cariche elettriche ($\rho = 0$) né correnti elettriche ($\vec{J} = 0$).

In questo caso le 4 equazioni di Maxwell in forma derivata sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (1a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4a)$$

Se supponiamo, per semplicità, che i campi \vec{E} e \vec{B} dipendano semplicemente dal tempo e dalla variabile x (ovvero che i campi assumano lo stesso valore in un piano y-z perpendicolare all'asse x, detta approssimazione di onda piana), $\vec{E}(x, t)$ $\vec{B}(x, t)$, è relativamente facile mostrare che le equazioni (1a) – (4a) si trasformano nelle seguenti equazioni:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

dove E_y, E_z, B_y, B_z sono, rispettivamente, le componenti y e z del campo elettrico e del campo magnetico.

Le soluzioni di queste quattro equazioni sono funzioni del tipo:

$$E_y = f(x - vt) \quad \text{oppure} \quad E_y = f(x + vt)$$

(analogamente per E_z, B_y, B_z), cioè sono soluzioni che prevedono che i campi elettrico e magnetico sono descritti da onde piane trasversali, cioè onde che si propagano nella direzione +x, nel caso di $f(x-vt)$, e -x, nel caso di $f(x+vt)$, (quindi perpendicolarmente al piano y-z in cui variano), con velocità (nel caso considerato del vuoto)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Nel caso il mezzo non sia il vuoto la velocità di propagazione sarà:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} < c$$

Una forma analitica semplice per descrivere queste soluzioni è la seguente:

$$E_y(x, t) = E_{0y} \text{sen}(kx - \omega t + \varphi)$$

Dove:

- E_{0y} indica il valore massimo del campo (ovvero quando $\text{sen}(\dots)=1$), ed è detta ampiezza dell'onda ;
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è detto numero d'onda, e λ è la lunghezza d'onda che indica la periodicità spaziale della soluzione. λ è una lunghezza, e quindi è espressa in metri, mentre k ha le dimensioni di una (lunghezza)⁻¹;
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ è detta pulsazione, T è il periodo ed indica la periodicità temporale (e si esprime in secondi). $\nu = \frac{1}{T}$ è detta frequenza e si misura in Hertz (1 Hz = 1s⁻¹);
- La lunghezza d'onda λ , la frequenza ν e la velocità di propagazione dell'onda v sono legate tra loro : $\lambda\nu = v$
- φ è chiamata fase e indica il valore del campo per $t=0$ e $x=0$

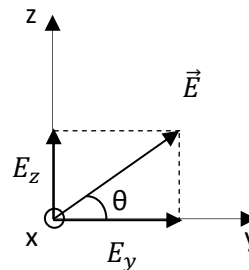
- Quando si propaga un campo elettrico mediante un'onda è sempre associato un campo magnetico, quindi si parla di campo elettromagnetico;
- I moduli del campo magnetico e del campo elettrico ($B^2 = B_x^2 + B_y^2$, $E^2 = E_x^2 + E_y^2$, $E_0 = \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$) non sono indipendenti ma sono legati: $\frac{E}{B} = v = c$ (nel vuoto)
- Il campo elettrico e il campo magnetico si propagano alla stessa velocità v e sono sempre perpendicolari tra loro ($\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$).

Polarizzazione

Il campo elettromagnetico è costituito da un campo elettrico e magnetico, ognuno con le sue componenti. Consideriamo solo il campo elettrico. Supponiamo di avere solo le componenti y e z che si propagano lungo x . La somma (vettoriale!) in ogni istante delle due componenti determina il campo elettrico complessivo che si propaga in direzione x .

$$E_y(x, t) = E_{0y} \sin(kx - \omega t + \varphi_y)$$

$$E_z(x, t) = E_{0z} \sin(kx - \omega t + \varphi_z)$$



Se queste due componenti variano in maniera indipendente l'una dall'altra (cioè non c'è una relazione precisa tra E_y e E_z) l'onda è detta non polarizzata. In questo caso, fissato per esempio un punto, nel tempo il vettore \vec{E} assume una direzione completamente casuale. Se invece esiste una relazione precisa tra E_y e E_z allora l'onda è detta polarizzata.

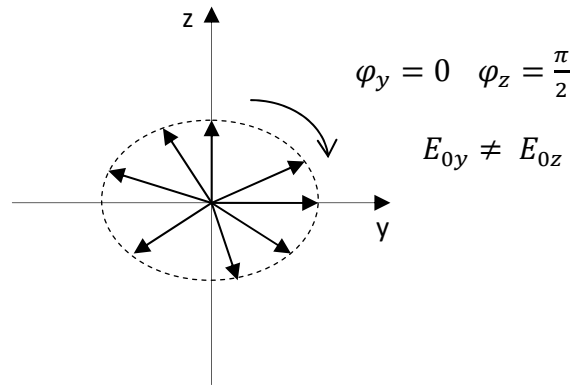
Se per esempio $\varphi_y = 0$ $\varphi_z = 0$ il campo \vec{E} varia lungo una retta che forma un angolo θ (costante) con l'asse y dato da: $\tan \theta = \frac{E_{0z}}{E_{0y}}$. Analogamente se $\varphi_y = 0$ $\varphi_z = \pi$. In questo caso si parla di polarizzazione rettilinea.

Se invece $\varphi_y = 0$ $\varphi_z = \frac{\pi}{2}$, si ha che :

$$E_y(x, t) = E_{0y} \sin(kx - \omega t)$$

$$E_z(x, t) = E_{0z} \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = E_{0z} \cos(kx - \omega t)$$

Il vettore somma è un vettore che "ruota" in senso orario (o antiorario per $\varphi_z = \frac{3}{2}\pi$) e forma un'ellisse (o una circonferenza nel caso di $E_{0y} = E_{0z}$). Si parla di polarizzazione ellittica (o circolare).



Intensità di un'onda elettromagnetica

La presenza in una regione di spazio di un campo elettrico e di un campo magnetico determinano la presenza di energia nella regione. La densità di energia (energia/volume, J/m^3) di un campo elettromagnetico (ricordando $\frac{E}{B} = c$) è data da:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$$

Questa densità di energia è trasportata dall'onda mentre questa si propaga.

L'intensità di un'onda elettromagnetica è definita come:

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 c \frac{1}{t} \int_0^t E_0^2 \text{sen}^2(kx - \omega t) dt$$

e si misura in W/m^2 , e corrisponde all'energia che attraversa nell'unità di tempo una sezione di area unitaria perpendicolare alla direzione di propagazione. Da notare che questa intensità è determinata calcolando un valore medio del quadrato del campo elettrico associato all'onda

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t E_0^2 \text{sen}^2(kx - \omega t) dt$$

in quanto, essendo le frequenze delle onde elettromagnetiche in generale molto elevate ($\nu \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$ (Hz) per luce visibile), qualunque dispositivo di misura (incluso l'occhio umano) è sensibile ad un valore medio, non potendo dare un valore istantaneo dell'intensità luminosa.

Sorgenti di onde elettromagnetiche

Esistono diverse sorgenti di onde elettromagnetiche. Queste possono essere emesse dalla diseccitazione di un atomo o molecola (un elettrone da uno stato eccitato cade in uno stato fondamentale emettendo onde elettromagnetiche), da un corpo ad alta temperatura (il filamento di una lampadina ad incandescenza emette luce perché si trova ad altissima temperatura, ma anche il corpo a temperatura ambiente emette onde elettromagnetiche,

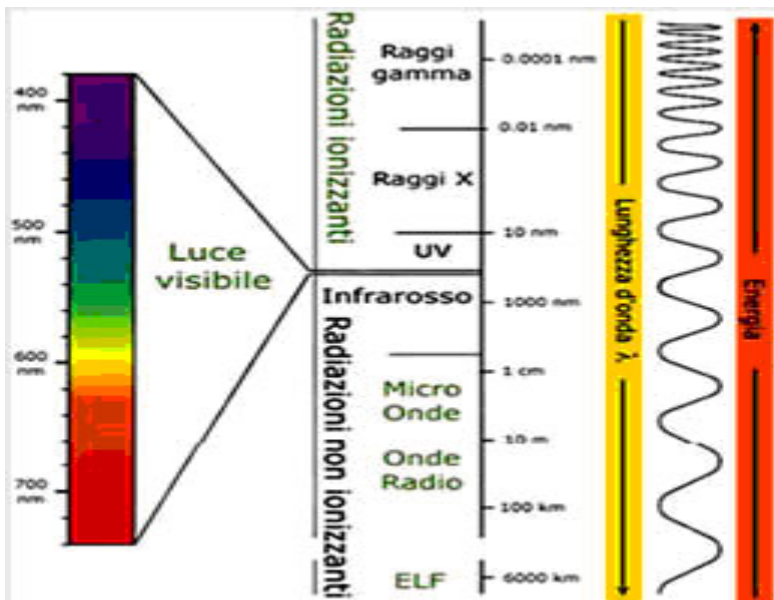
basta pensare ai visori all'infrarossi usati per "vedere" al buio le persone o in generale i corpi più caldi degli altri oggetti circostanti). Un altro modo per emettere onde elettromagnetiche è quando una carica elettrica è accelerata. In questo caso la potenza emessa è data dalla legge di Larmor:

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

dove a è l'accelerazione e c è la velocità della luce nel vuoto. Questa relazione vale per cariche che si muovono con velocità non relativistiche ($v \ll c$).

Questo è il modo con cui emettono onde elettromagnetiche le antenne. Le cariche elettriche, cioè gli elettroni, oscillano alle frequenze di interesse nelle antenne ed emettono onde. Lo stesso sistema è utilizzato da acceleratori di particelle progettati per emettere radiazione (onde elettromagnetiche), quali i sincrotroni (gli elettroni ruotano in orbite quasi circolari e ad ogni cambiamento di direzione sono soggetti all'accelerazione centripeta) o sorgenti di radiazione X per bremsstrahlung (le cariche ad alta velocità urtano un ostacolo, in genere un foglio metallico, e sono pertanto fortemente decelerate, oltre ad eccitare transizioni atomiche che successivamente emettono onde elettromagnetiche, in generale raggi X, per diseccitazione).

Spettro elettromagnetico



La figura mostra una suddivisione dello spettro elettromagnetico in base alla lunghezza d'onda. L'energia delle onde cresce al diminuire della lunghezza d'onda (verso l'alto). Come si vede la luce visibile occupa una porzione estremamente ridotta dell'insieme delle onde elettromagnetiche.

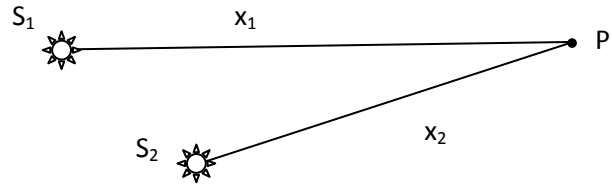
Interferenza

Quando esistono 2 o più sorgenti di onde elettromagnetiche si può osservare il fenomeno dell'interferenza, cioè l'intensità dell'onda complessiva non è costante in tutti i punti e può essere maggiore (anche molto) della semplice somma delle singole intensità.

Consideriamo solo il campo elettrico. Se abbiamo 2 sorgenti (S_1 e S_2) che emettono due onde (con la stessa lunghezza d'onda) che arrivano nel punto P distante rispettivamente x_1 e x_2 dalle due sorgenti, i due campi nel punto P sono descritti dalle equazioni:

$$E_1(x, t) = E_{01} \cos(kx_1 - \omega t + \varphi_1)$$

$$E_2(x, t) = E_{02} \cos(kx_2 - \omega t + \varphi_2)$$



L'intensità dell'onda (cioè quello che si misura o che, nel caso di luce visibile, si osserva con l'occhio che è il nostro personale sensore) è data da:

$$I(P) = \varepsilon_0 c \frac{1}{t} \int_0^t [E_{01} \cos(kx_1 - \omega t + \varphi_1) + E_{02} \cos(kx_2 - \omega t + \varphi_2)]^2 dt =$$

$$= \varepsilon_0 c \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle = \varepsilon_0 c \langle (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2) \rangle =$$

$$\varepsilon_0 c \langle E_1^2 \rangle + \varepsilon_0 c \langle E_2^2 \rangle + 2\varepsilon_0 c \frac{E_{01}}{\sqrt{2}} \frac{E_{02}}{\sqrt{2}} \cos[k(x_2 - x_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos[k(x_2 - x_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)] = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

dove $\delta = [k(x_2 - x_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)]$. Quest'ultimo è il termine che determina l'interferenza.

Se $\cos \delta = 1$ ($\delta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$): $I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} > I_1 + I_2$ cioè l'intensità totale è maggiore della somma delle due intensità.

Se $\cos \delta = -1$ ($\delta = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$): $I(P) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} < I_1 + I_2$ cioè l'intensità totale è minore della somma delle due intensità.

Caso molto importante è per $I_1 = I_2 = I_0$ ($E_{01} = E_{02}$).

In questo caso:

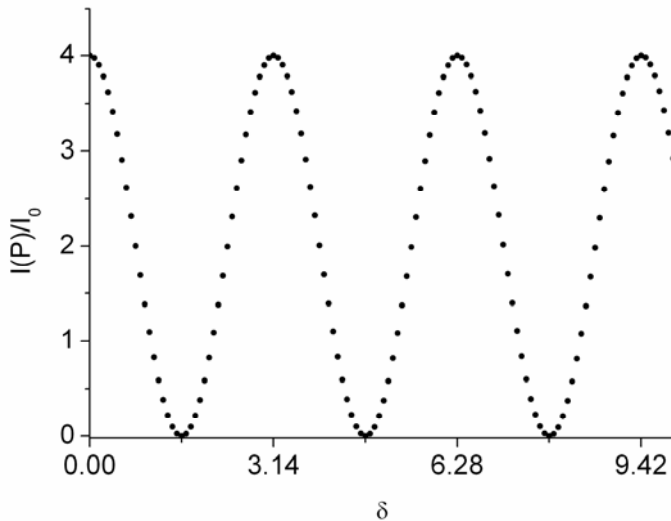
$$I(P) = I_0 + I_0 + 2I_0 \cos \delta = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Se $\varphi_2 = \varphi_1$ (questa condizione non è importante, mentre è fondamentale la condizione di "coerenza" cioè che $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{costante}$ (nel tempo), altrimenti non si ha il fenomeno di interferenza) si ha che:

$$I(P) = 4I_0 \quad \text{per} \quad x_2 - x_1 = 0, \lambda, 2\lambda, \dots, n\lambda \quad \text{interferenza costruttiva}$$

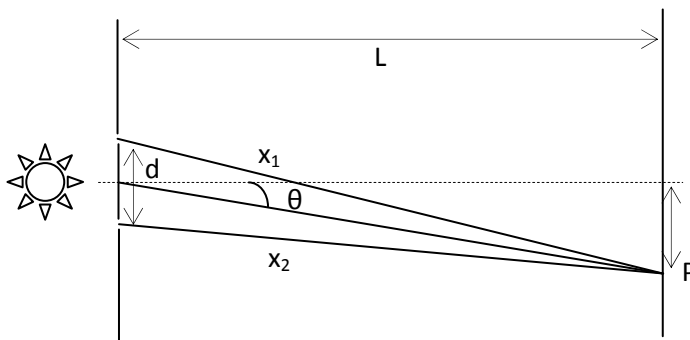
$$I(P) = 0 \text{ per } x_2 - x_1 = \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}\lambda, \dots \quad \text{interferenza distruttiva}$$

Nella figura sottostante è rappresentata la funzione $I(P)/I_0$



I massimi (di interferenza) indicano che per quei valori di δ (e quindi di $x_2 - x_1$) l'intensità del campo elettrico totale è 2 volte l'intensità che si avrebbe se si avesse la semplice somma di intensità delle due sorgenti ($I(P) = 4 I_0$ invece di $I(P) = I_0 + I_0 = 2I_0$). Nei punti di minimo (interferenza distruttiva) le onde si sommano annullandosi completamente. In questi punti si ha "buio".

Un esempio di esperimento di interferenza con 2 sorgenti si ha usando una sorgente coerente (un laser) che illumina 2 fenditure distanti tra loro d . La luce trasmessa arriva su uno schermo distante L (vedi figura).



Se $L \gg d$ x_1 e x_2 sono approssimativamente paralleli:

$$x_2 - x_1 \approx d \sin \theta$$

$$\delta = k (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

$$I(P) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta\right)$$

Massimi di interferenza:

$$\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} m, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

Minimi di interferenza:

$$\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \dots$$

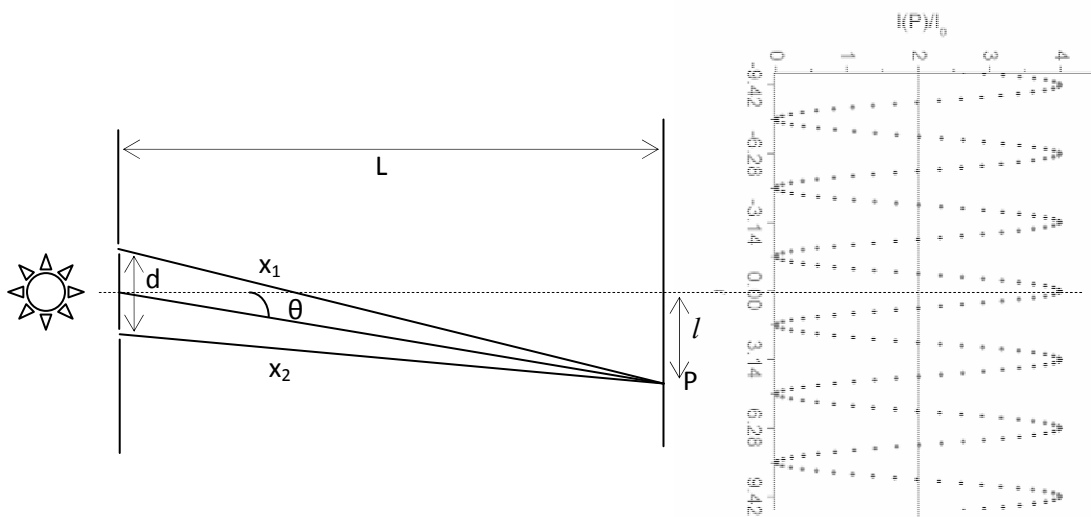
$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

Se l è la distanza del punto P dalla retta mediana tra le due fenditure:

$$l = L \operatorname{tg} \theta \approx L \theta$$

Massimi di interferenza: $l = \frac{L\lambda}{d} m \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots$

Minimi di interferenza: $l = \frac{L\lambda}{d} \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots$



Nella figura superiore è mostrato il tipico esperimento di interferenza da 2 fenditure distanti d (a sinistra) e a destra il grafico dell'intensità della luce in funzione della distanza l dalla linea mediana. La linea continua a $I(P)/I_0 = 2$ indica l'intensità che si avrebbe con le 2 sorgenti senza il processo di interferenza (per esempio nel caso di sorgenti non coerenti).

Nel caso di N fenditure, utilizzando gli stessi simboli, si ha:

$$I = I_0 \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{N\delta}{2} \right)}{\text{sen} \frac{\delta}{2}} \right]^2 \quad \text{con} \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{sen}\theta$$

I massimi si hanno per $\text{sen} \frac{\delta}{2} = 0$, $\text{sen}\theta = m \frac{\lambda}{d}$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

I minimi si hanno per $\text{sen} \frac{N\delta}{2} = 0$, $\text{sen}\theta = m \frac{\lambda}{Nd}$ $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

Si hanno anche dei massimi secondari che però, al crescere di N, diventano sempre meno intensi.

L'intensità dei massimi principali è dato da:

$$I_{max} = N^2 I_0 \quad (\text{essendo } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } Nx}{\text{sen } x} = N)$$

Anche la larghezza angolare dei massimi principali dipende da N:

$$\Delta = \frac{2\lambda}{Nd}$$

Pertanto al crescere di N aumenta l'intensità dei massimi principali e diminuisce la larghezza dei picchi, che diventano più evidenti e più definiti.

Un esempio di applicazione di questo fenomeno è il reticolo di diffrazione, utilizzato per selezionare le lunghezze d'onda di una sorgente policromatica. Questo strumento è usato in alternativa al prisma, la cui capacità di separare le diverse lunghezze d'onda dipende dal fenomeno della rifrazione (l'indice di rifrazione, n, dipende dalla lunghezza d'onda).

Interferenza da film (strato) sottile

Quando la luce (o in generale un'onda elettromagnetica) colpisce una superficie si osservano 2 fenomeni: riflessione e rifrazione.

Considerando la propagazione della luce utilizzando l'ottica geometrica (cioè usando i raggi luminosi per rappresentare la luce che si propaga) abbiamo:

per la riflessione, essendo θ_1 l'angolo di incidenza (l'angolo formato tra il raggio luminoso incidente e la perpendicolare alla superficie) e θ_2 l'angolo di riflessione (l'angolo formato tra il raggio luminoso riflesso e la perpendicolare alla superficie), si ha che $\theta_1 = \theta_2$;

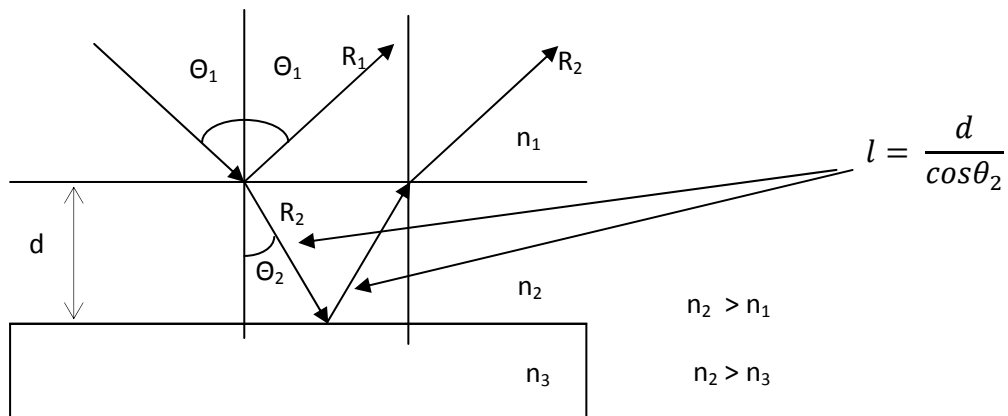
per la rifrazione, cioè quando un raggio luminoso incide con un angolo θ_1 su una superficie (rispetto alla normale) e la attraversa (cioè si propaga all'interno del secondo mezzo) tra l'angolo di incidenza e l'angolo che il raggio nel secondo mezzo forma con la normale vale la relazione:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

dove n è chiamato indice di rifrazione del mezzo ed è definito come $n = c / v$, essendo c la velocità della luce nel vuoto (o aria) e v la velocità della luce nel mezzo. Per il vuoto $n = 1$, per tutti gli altri mezzi $n > 1$ (essendo $c > v$)

La rifrazione prevede il processo della riflessione totale, fenomeno utilizzato nel "funzionamento" delle fibre ottiche.

Quando della luce colpisce una superficie su cui è depositato uno strato sottile di altro materiale si può osservare il fenomeno di interferenza da film sottile. Tipico caso è uno strato di olio su acqua o asfalto.



Supponiamo di avere un film di spessore d con indice di rifrazione n_2 e la luce arriva da un mezzo di indice di rifrazione n_1 .

La prima superficie riflette il raggio R_1 . Il raggio R_2 passa nel secondo mezzo, subendo una rifrazione, e viene riflesso dalla seconda superficie. Successivamente torna nel mezzo 1 dopo una seconda rifrazione. I due raggi uscenti sono paralleli e arrivano sullo schermo. Hanno però percorso un cammino diverso, dato dal percorso nel mezzo 2, $2l = \frac{2d}{\cos \theta_2}$.

Se questa differenza di cammino è un multiplo intero della lunghezza d'onda della luce (λ) incidente possiamo avere interferenza costruttiva.

Un caso semplice è se la luce **incide perpendicolarmente** alla superficie. In questo caso la differenza di cammino è solo $2d$. La differenza di fase tra i raggi R_1 e R_2 è (per $\varphi_2 = \varphi_1$) :

$$\delta = [k(x_2 - x_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)] = k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda'} 2d + \pi = \frac{4\pi n_2 d}{\lambda} + \pi$$

In questa equazione il termine π è introdotto per una variazione di fase quando l'onda viene riflessa dalla prima superficie, mentre la lunghezza d'onda λ' è diversa da λ perché questa cambia passando dal mezzo 1 al mezzo 2. (la variazione di fase di π si ha quando, in condizioni di incidenza normale, la luce passa da un mezzo ad indice di rifrazione più

piccolo ad un mezzo ad indice di rifrazione più grande (nel nostro caso $n_1 < n_2$), mentre non si ha nel caso contrario, come nella seconda interfaccia del disegno).

Si ha interferenza costruttiva se $\delta = k(x_2 - x_1) = 2m\pi$, quindi per:

$$\frac{4\pi n_2 d}{\lambda} + \pi = 2m\pi$$

$$d = (2m - 1) \frac{\lambda}{4n_2} \quad m = 1, 2, \dots$$

Si ha interferenza distruttiva se

$$\frac{4\pi n_2 d}{\lambda} + \pi = (2m + 1)\pi$$

$$d = m \frac{\lambda}{2n_2} \quad m = 1, 2, \dots$$

Questo effetto permette, conoscendo la lunghezza d'onda della luce incidente λ e l'indice di rifrazione n_2 dello strato sottile, di determinare lo spessore del film d .

Un'applicazione importante è nel caso dei sistemi antiriflesso, cioè film sottili depositati su un substrato che devono minimizzare o annullare l'intensità dell'onda e-m riflessa.

Supponiamo di avere un sistema a 3 strati con indici di rifrazione n_1, n_2, n_3 , con $n_1 < n_2 < n_3$. Se d = spessore del film intermedio, si ha interferenza costruttiva quando:

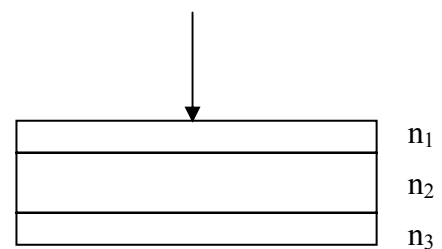
$$\frac{4\pi n_2 d}{\lambda} = 2m\pi, \text{ quindi}$$

$$d = m \frac{\lambda}{2n_2} \quad m = 1, 2, \dots$$

Si ha interferenza distruttiva per:

$$\frac{4\pi n_2 d}{\lambda} = (2m + 1)\pi, \text{ quindi}$$

$$d = (2m + 1) \frac{\lambda}{4n_2} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$



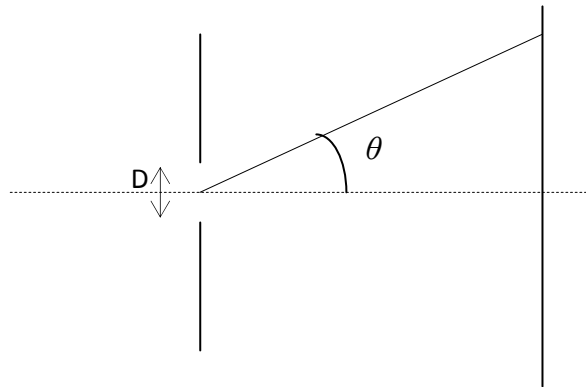
Pertanto, nota la lunghezza d'onda λ , si può utilizzare un film di opportuno indice di rifrazione e spessore per essere in condizioni di interferenza distruttiva.

Diffrazione

La diffrazione è un effetto di interferenza che si osserva quando la luce attraversa una unica fenditura. Se si considera che ogni punto della fenditura è una sorgente di luce e che queste possono interferire tra loro, l'intensità di luce che attraversa una fenditura e che si osserva su uno schermo è data da:

$$I = I_0 \left(\frac{\text{sen } \beta}{\beta} \right)^2 \quad \text{con} \quad \beta = \frac{\pi D}{\lambda} \text{sen} \theta$$

In questa relazione D è la dimensione della fenditura e θ è l'angolo tra la normale dello schermo che passa al centro della fenditura e la direzione del punto nel quale determinare l'intensità.



Il massimo principale si ha per $\theta=0$. Si hanno poi dei minimi per $\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$..cioè per $\text{sen} \theta = \lambda/D, 2\lambda/D, 3\lambda/D$...

Tra questi minimi si hanno anche dei massimi secondari per $\text{sen} \theta = 1.43\lambda/D, 2.46\lambda/D, ..$

Quando si hanno diverse fenditure, il fenomeno di diffrazione si somma al termine di interferenza. Quindi nel caso di N fenditure:

$$I = I_0 \left(\frac{\text{sen } \beta}{\beta} \right)^2 \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{N\delta}{2} \right)}{\text{sen} \frac{\delta}{2}} \right]^2$$

Esperimenti che hanno messo in crisi la fisica classica

Radiazione di corpo nero

Ogni oggetto che si trova ad una temperatura diversa dallo zero assoluto emette onde elettromagnetiche. In particolare quando un oggetto è a temperatura elevata (diverse centinaia di gradi centigradi) questo emette radiazione elettromagnetica nel visibile-infrarosso.

Un particolare corpo, detto corpo nero (black-body), è un oggetto che assorbe tutta la luce che lo colpisce (cioè non riflette niente) e, quindi, tutta la radiazione emessa è unicamente dovuta alla temperatura del corpo.

La fisica classica non poteva spiegare lo spettro misurato di emissione del corpo nero, cioè l'intensità di luce emessa in funzione della lunghezza d'onda.

Planck nel 1900 propose un nuovo modello per stabilire l'energia emessa da un corpo caldo. Questa emissione è dovuta agli atomi che, oscillando per effetto termico, emettono energia. Nel modello di Planck venne introdotto il concetto di "quantum" di energia, cioè un atomo (o in generale un sistema oscillante) può emettere (o assorbire) energia in termini di multipli interi di una quantità fissa:

$$E = n\varepsilon = nh\nu$$

dove n = intero (1,2,3..), h = costante, e ν = frequenza.

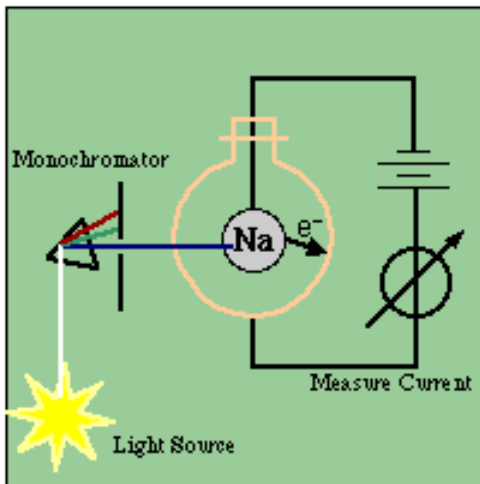
Con questo modello rivoluzionario si poté spiegare l'emissione di corpo nero e per la prima volta venne introdotto il concetto di base della meccanica quantistica, cioè il "quantum".

La costante h , detta successivamente costante di Planck, venne valutata come 6.56×10^{-34} Js (Joule x secondo) dallo stesso Planck, e successivamente (circa 15 anni dopo) venne determinata sperimentalmente da Millikan (6.63×10^{-34} Js).

Effetto fotoelettrico:

Se della luce colpisce una superficie metallica possono essere emessi elettroni, cioè viene misurata una corrente elettrica tra la superficie metallica e una massa. Nella figura la luce, separata nelle lunghezze d'onda mediante un prisma, colpisce una sfera di sodio (Na) e gli elettroni emessi sono raccolti sulla sfera esterna. Una differenza di potenziale si applica tra la superficie metallica e la massa (mediante un generatore di tensione variabile) per facilitare la raccolta delle cariche emesse.

La corrente misurata dipende dalla lunghezza d'onda della luce incidente: oltre una certa soglia (cioè per lunghezze d'onda troppo grandi) non si misura corrente di elettroni, indipendentemente dall'intensità della luce (cioè da quanta luce viene inviata sulla superficie metallica). Per lunghezze d'onda più piccole di un certo valore (che dipende dal metallo usato) si osserva l'emissione di elettroni. Questa corrente può essere ridotta fino ad annullarla se la differenza di potenziale applicata è negativa, cioè frenando gli elettroni.



Questo esperimento (Hertz, 1887) non si spiega mediante la fisica classica, in particolare utilizzando la teoria ondulatoria della luce.

La spiegazione è stata data da Einstein (1905, Premio Nobel 1921), utilizzando una teoria introdotta da Planck nel 1900. Einstein propose che l'energia della luce si possa pensare concentrata in "punti", detti successivamente fotoni, e che questa fosse collegata alla frequenza della luce, attraverso la costante di Planck.

Nella teoria di Einstein quindi $E = h\nu$, dove h è la costante di Planck e ν è la frequenza della luce. Questo vuol dire che se usiamo una frequenza troppo bassa (quindi una lunghezza d'onda troppo grande) non forniamo sufficiente energia agli elettroni per uscire dal metallo. L'energia necessaria per l'emissione degli elettroni, cioè l'energia con la quale gli elettroni sono legati al campione metallico, è detta funzione lavoro (work function), e dipende dal metallo. Aumentando l'intensità della luce incidente non aumentiamo l'energia che forniamo agli elettroni ma solo il numero di fotoni incidenti. Quindi se l'energia dei fotoni è sufficiente per l'emissione degli elettroni (cioè se la frequenza è sufficientemente alta) possiamo emettere gli elettroni. Se aumentiamo l'intensità della luce (tenendo fissa la frequenza) possiamo aumentare il numero degli elettroni emessi e, quindi, l'intensità della corrente misurata.

Diffrazione di elettroni

Nel 1924 de Broglie propose un modello rivoluzionario e introdusse il concetto che qualunque particella di massa m che si muove con velocità v e che, quindi, abbia una quantità di moto $p = mv$ possa essere descritta da un'onda con lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove h è la costante di Planck. Dato il piccolo valore della costante di Planck solo particelle con massa molto piccola hanno una lunghezza d'onda osservabile sperimentalmente.

Infatti se prendiamo una sfera di raggio $r=10^{-4}$ cm, densità $\rho = 10$ g/cm³ e velocità $v=1$ cm/s:

$$p = mv = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho v = 4 \times 10^{-16} \text{ kg } \frac{m}{s}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = 1.6 \times 10^{-18} \text{ m}$$

Questo valore non è misurabile. Invece se pensiamo ad un elettrone accelerato con una differenza di potenziale di 10 V, quindi con energia cinetica di 10 eV:

$$E = 10 \text{ eV} = 10 \times 1.6 \times 10^{-19} = 1.6 \times 10^{-18} \text{ J}$$

La quantità di moto si ottiene, nel caso di velocità non relativistica, da:

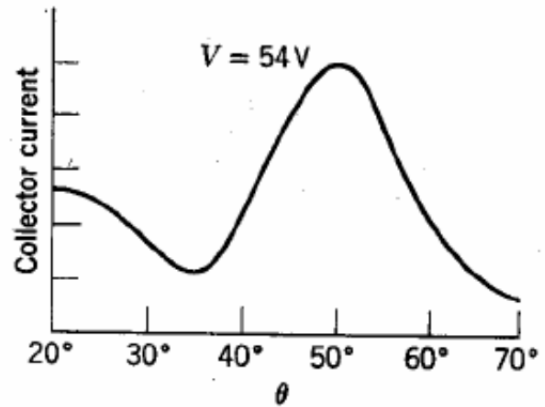
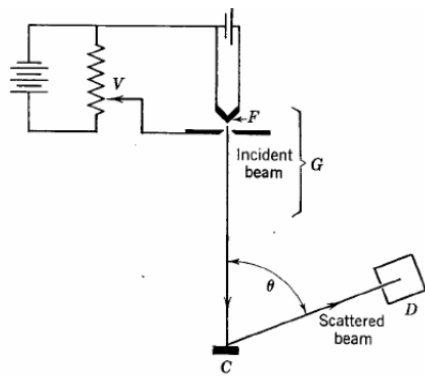
$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2mE} = 1.7 \times 10^{-24} \text{ kg m/s}$$

Da questi valori si ha che la lunghezza d'onda in questo caso è:

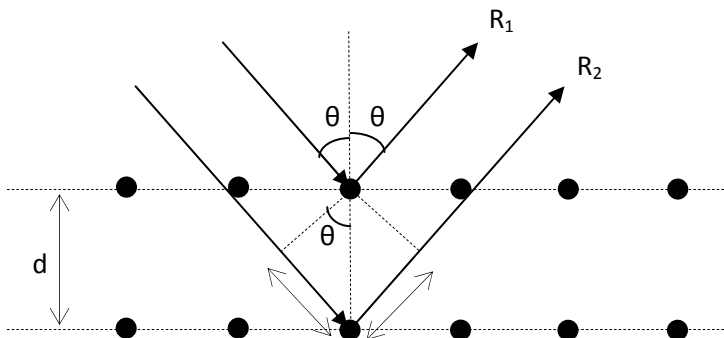
$$\lambda = \frac{h}{p} = 3.3 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Questo valore è simile alla distanza inter-atomica in un cristallo, e pertanto gli elettroni potrebbero subire processi tipici delle onde, come la diffrazione da parte di un reticolo.

Questa teoria è stata verificata utilizzando l'interferenza, cioè mediante un fenomeno tipico delle onde elettromagnetiche. Questo esperimento è stato fatto da Davisson e Germer (1926), che osservarono, inviando elettroni di bassa energia (54 eV) contro un cristallo di nichel, un picco nel numero di elettroni riflessi per particolari valori dell'angolo θ di deviazione (o scattering),.



Questo esperimento è simile a quello utilizzato per studiare la struttura cristallina dei solidi, la diffrazione X, in cui raggi X sono inviati contro un solido e si osservano processi di interferenza costruttiva e distruttiva. Conoscendo la lunghezza d'onda dei raggi X utilizzati (dell'ordine dei decimi di nanometri), si può determinare, misurando l'angolo per il quale si osserva un picco dovuto all'interferenza costruttiva, la distanza tra gli atomi.



I raggi R_1 e R_2 sono riflessi dai 2 piani di atomi, che distano d . Si ha interferenza costruttiva se la differenza di cammino ottico tra i due raggi ($2d \sin\theta$, rappresentata dalle 2 frecce) è un multiplo intero della lunghezza d'onda:

$$2 d \sin\theta = n \lambda$$

Questa equazione è detta legge di Bragg, ed è simile alla interferenza costruttiva da film sottile.

Pertanto l'esperimento di Davisson e Germer mostrò che la teoria di de Broglie era corretta e che le particelle possono essere descritte da un'onda.

Dimostrazioni in aula

- Accumulo di carica elettrostatica
- Effetto di carica elettrostatica (forza di Coulomb)
- Corrente che passa in un circuito con una resistenza
- Campo magnetico generato da un filo, visualizzato mediante aghi magnetici
- Campo magnetico generato da una spira e da un solenoide percorso da corrente elettrica visualizzati mediante polvere di ferro
- Forza elettromotrice generata in una spira che ruota in un campo magnetico
- Onde elettromagnetiche: visualizzazione dell'onda e-m mediante tubo fluorescente
- Polarizzazione della luce e uso di polarizzatori
- Assorbimento di energia acustica (risonanza)
- Interferenza da 2 fenditure, uso di 2 diverse lunghezze d'onda
- Reticolo di diffrazione
- Luce emessa da sorgente continua (lampada a filamento) e discreta (lampada ai vapori di idrogeno e sodio)
- Interferenza da film sottile (acqua saponata)
- Caccia alla tigre (moto del proiettile, only for fun!)