

Dalla meccanica classica alla meccanica quantistica

A metà del XIX secolo, con il consolidamento delle teorie sulla meccanica e con la teoria di Maxwell (1864) sull'unificazione della teoria dei campi elettrici e magnetici, sembrava che tutti i fenomeni fisici conosciuti potevano essere interpretati con le teorie note.

Alla fine del XIX una serie di esperimenti, i cui risultati non potevano essere spiegati con la meccanica classica, hanno portato alla nascita della meccanica quantistica:

- Emissione di luce da un corpo ad alta temperatura (corpo nero) → *teoria di Planck e prima ipotesi di quantizzazione dell'energia per un sistema oscillante;*
- Emissione di particelle (elettroni) da un metallo illuminato da luce UV (effetto fotoelettrico, Hertz 1887) → *concetto di fotone (Einstein) e relazione energia-frequenza, introduzione della funzione lavoro nei solidi;*
- Urto (scattering) tra fotoni e particelle (effetto Compton 1923) → *conferma del comportamento particellare dei fotoni*
- Emissione di luce da gas eccitati elettricamente o termicamente: spettri discreti → *modello di Bohr e introduzione del concetto di stati quantizzati per gli elettroni in un atomo (idrogenoide);*
- Calore specifico dei solidi: comportamento a basse temperature → *quantizzazione delle oscillazioni degli atomi nei solidi;*
- Esperimento di Michelson-Morley sulla velocità della luce (1887) → *teoria della relatività (ristretta, Einstein 1905).*

Radiazione di corpo nero (black-body radiation)

Un qualunque oggetto che si trova a temperatura superiore a 0 K (gradi Kelvin, temperatura assoluta) emette onde elettromagnetiche, e.m. (per temperature vicino alla temperatura ambiente si tratta di infrarossi, $\lambda > 1 \mu\text{m}$).

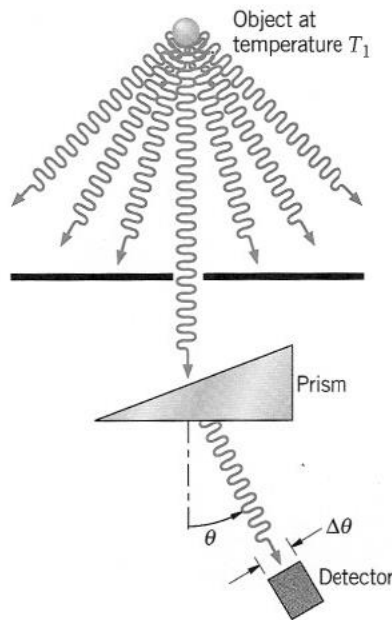


Fig. configurazione sperimentale per la misura dell'energia e.m. emessa da un corpo caldo

Esempio "attuale": le termocamere.



Fig. immagine "termografica" di oggetti caldi

L'emissione di onde elettromagnetiche da un corpo "caldo" ($T > 0\text{K}$) si spiega classicamente con il moto delle cariche sulla superficie per effetto dell'agitazione termica.

Equazione di Larmor (per velocità delle cariche $v \ll c$): potenza emessa da una carica elettrica q soggetta ad un'accelerazione a :

$$P (W) = \frac{q^2 a^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3}$$

L'energia totale (cioè su tutto lo spettro elettromagnetico) emessa per unità di tempo e di area (intensità totale) da un corpo a temperatura T è data dalla legge di Stefan (1879):

$$I(Wm^{-2}) = e\sigma T^4$$

dove σ = costante di Stefan-Boltzmann ($5.67 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$), e = emissività (0-1, dipendente dalla natura della superficie dell'oggetto).

L'andamento della curva di Stefan dalla temperatura assoluta T e il valore della costante di Stefan-Boltzmann sono il risultato di dati sperimentali.

Un corpo colpito da onde e.m. può assorbirne una parte, convertendo l'energia dell'onda in energia termica, aumentando cioè la sua temperatura, a causa dell'aumento dell'energia cinetica delle cariche in superficie.

Si definisce a = assorbanza il rapporto tra l'intensità delle onde e.m. assorbita e l'intensità incidente (trascurando la parte trasmessa, quindi per campioni spessi).

Da considerazioni termodinamiche Kirchhoff (1895), verificato anche sperimentalmente, stabili che

$$a = e$$

Pertanto, per esempio, un oggetto che ha un'alta emissività ($e \rightarrow 1$) avrà anche un'alta assorbanza ($a \rightarrow 1$) e viceversa.

Un oggetto di particolare interesse è il Corpo Nero (black-body).

Corpo Nero: "oggetto" che assorbe tutta la radiazione incidente, indipendentemente dalla sua lunghezza d'onda:

$$a = \frac{\textit{intensità assorbita}}{\textit{intensità incidente}} = 1$$

Ovviamente per un corpo nero è nulla la parte di intensità dell'onda e.m. incidente che è riflessa dalla superficie (oltre quella trasmessa che, come detto sopra, in questo tipo di analisi si trascura sempre, ovvero si considerano oggetti "spessi").

Per corpo nero, essendo $a=1$, si ha anche $e=1$, e pertanto la legge di Stefan diventa una legge universale (cioè indipendente dalle caratteristiche del corpo):

$$I = \sigma T^4$$

Un esempio di corpo nero è un piccolo foro praticato sulle pareti di una cavità: tutta l'energia incidente sul foro è assorbita. Infatti non ci può essere riflessione perché se il foro è piccolo è estremamente improbabile che le onde e.m. entranti dal foro dall'esterno, riflesse dalle superfici interne della cavità, riescano ad uscire dal foro stesso. Pertanto la radiazione e.m. emessa dal foro rappresenta l'emissione di un corpo nero a temperatura T!

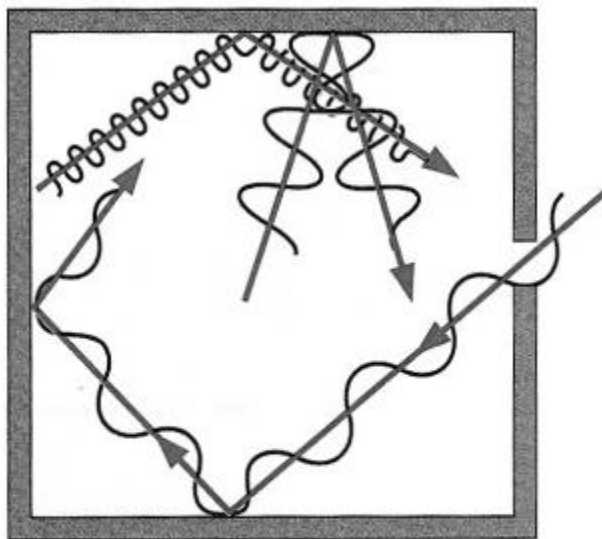


FIGURE 3.15 A cavity filled with electromagnetic radiation. The hole in the wall of the cavity represents an ideal blackbody.

L'andamento "spettrale", cioè la dipendenza di $I(T)$ dalla lunghezza d'onda delle onde e.m. emesse, è data dalla radianza $R_T(\lambda)$:

$$I(T) = \int_0^{\infty} R_T(\lambda) d\lambda$$

Le misure fatte alla fine del XIX secolo (Lummer e Pringsheim, 1899) mostrarono un andamento della radianza simile a quello riportato in figura.

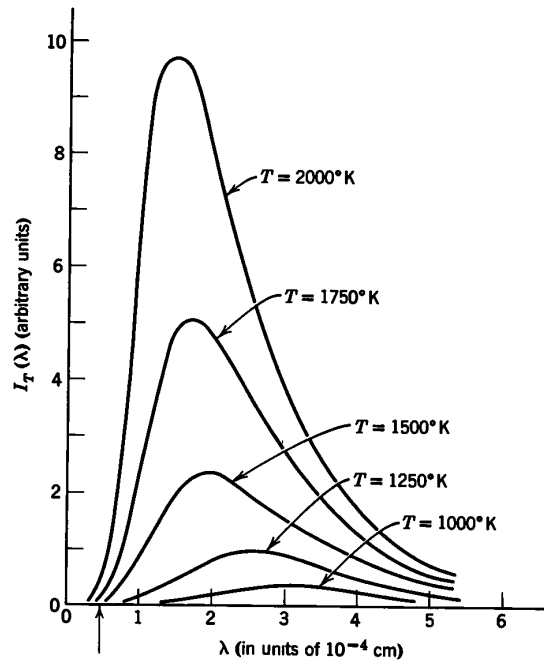


Fig. Andamento di $R_T(\lambda)$ per un corpo nero a diverse temperature T

Dall'andamento sperimentale si osserva come il valore di λ al quale si osserva il massimo di emissione per un corpo nero dipende dalla temperatura secondo la legge dello spostamento di Wien (1893):

$$\lambda_{max} \sim \frac{1}{T}$$

Dal confronto con i dati sperimentali si ottiene: $\lambda_{max} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m K}$.

Un esempio di corpo nero è il sole con una temperatura di 5900K.

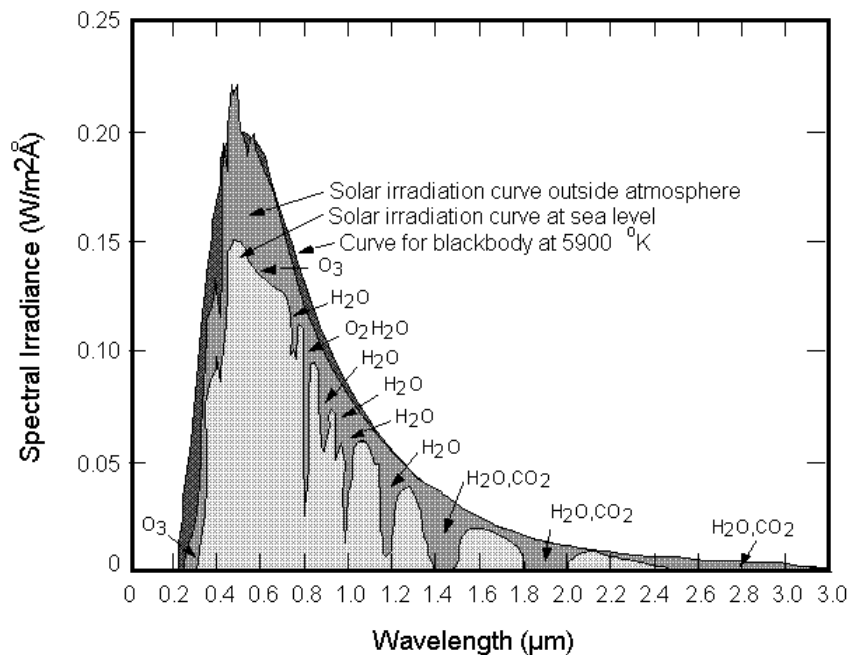


Fig. Spettro di emissione del sole al di fuori dell'atmosfera confrontato con l'emissione di un corpo nero con $T=5900\text{K}$ (in chiaro lo spettromisurato al livello del mare con gli assorbimenti dovuti alle molecole presenti nell'atmosfera)

Se la radiazione emessa da un corpo nero (il foro) è quella presente nella cavità, prodotta dalle pareti della cavità a temperatura T , allora la radianza $R_T(\lambda)$ è collegata alla densità di energia e.m. presente all'interno della cavità $u_T(\lambda)$, definita come l'energia del campo e.m. per unità di volume nell'intervallo di lunghezze d'onda tra λ e $\lambda+d\lambda$. Si può dimostrare che:

$$R_T(\lambda) = \frac{c}{4} u_T(\lambda)$$

dove c è la velocità della luce. Questa relazione vale per cavità di qualsiasi forma. Pertanto per determinare la radianza $R_T(\lambda)$ "basta" calcolare la densità di energia e.m. $u_T(\lambda)$.

Da considerazioni termodinamiche Wien (1893) trovò una relazione funzionale per la densità di energia $u_T(\lambda)$ di un corpo nero a temperatura T . Questa dipende da una funzione di λT (non nota) secondo la seguente equazione:

$$u_T(\lambda) = \frac{f(\lambda T)}{\lambda^5}$$

Questa equazione approssima bene i dati sperimentali (fig. seguente) ma non si hanno ancora informazioni dettagliate sulla $f(\lambda T)$.

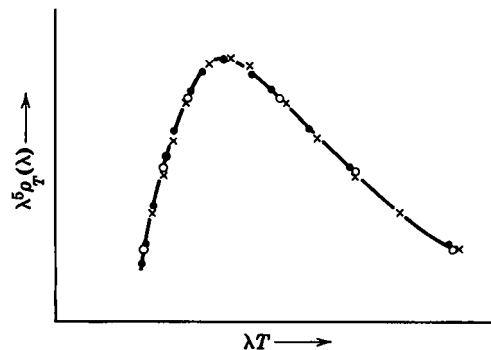


Figure 2-5. An experimental verification of Wien's law. ●, $T = 1646^\circ\text{K}$; ×, $T = 1449^\circ\text{K}$; ○, $T = 1259^\circ\text{K}$. From F. K. Richtmyer, E. H. Kennard, and T. Lauritsen, *Introduction to Modern Physics*, 5th ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1955.

Fig. Confronto tra i dati sperimentali e la curva teorica data dalla legge di Wien

Negli anni diversi fisici cercarono di determinare teoricamente la formula che spiegasse i dati sperimentali

Anno	Autore	Formula
1887	Władimir Aleksandrowicz Michelson	$e(\lambda, T) = aT^{3/2}\lambda^{-6} \exp(-b/\lambda^2 T)$
1888	Heinrich Weber	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-2} \exp(cT - b/\lambda^2 T^2)$
1896	Wilhelm Wien	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-5} \exp(-b/\lambda T)$
1896	Friedrich Paschen	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-5.6} \exp(-b/\lambda T)$
1900	Lord Rayleigh	$e(\lambda, T) = aT\lambda^{-4} \exp(-b/\lambda T)$
1900	Otto Lummer i Ernst Pringsheim	$e(\lambda, T) = aT\lambda^{-4} \exp(-b/(\lambda T)^{1.25})$
1900	Otto Lummer i Eugen Jahnke	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-5} \exp(-b/(\lambda T)^{0.9})$
1900	Max Thiesen	$e(\lambda, T) = aT^{0.5}\lambda^{-4.5} \exp(-b/\lambda T)$
1900	Max Planck (19 X)	$e(\lambda, T) = a\lambda^{-5} \left(\frac{1}{\exp(b/k\lambda T) - 1} \right)$
1900	Max Planck (14 XII)	$e(\lambda, T) = 8\pi hc\lambda^{-5} \left(\frac{1}{\exp(hc/k\lambda T) - 1} \right)$

Nel 1900 Lord Rayleigh e, successivamente con correzioni, nel 1905 J. Jeans ottennero una equazione, detta equazione di Rayleigh-Jeans, determinando le onde e.m. che potevano essere contenute nella cavità e calcolando l'energia media di ogni onda.

Per calcolare le onde presenti nella cavità supposero le pareti metalliche (tra l'altro gli esperimenti si eseguivano su corpi neri metallici) e, imponendo la condizione che le onde e.m. fossero stazionarie (il campo elettrico deve annullarsi sulla superficie interna della cavità) ottennero che il numero di onde e.m. con lunghezza d'onda tra λ e $\lambda+d\lambda$ per unità di volume è dato da:

$$N(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

Questo risultato è indipendente dalla forma della cavità.

Per la fisica classica l'energia di un'onda è proporzionale al quadrato della sua ampiezza, quindi, nel caso delle onde e.m. l'energia è proporzionale al quadrato del campo elettrico, E^2 . In linea di principio, quindi, le onde e.m. potrebbero avere quindi energie che vanno da $0 \rightarrow \infty$.

Quando però si ha a che fare un un gran numero di entità fisiche dello stesso tipo in equilibrio termico tra loro è più semplice utilizzare la fisica statistica e la distribuzione di probabilità. In questo modo determinarono che l'energia media delle onde e.m. nella cavità le cui pareti si trovano a temperatura T è data da

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty EP(E)dE}{\int_0^\infty P(E)dE} = \frac{\int_0^\infty E e^{-\frac{E}{kT}} dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}} dE} = kT$$

essendo

$$P(E) = A e^{-\frac{E}{kT}}$$

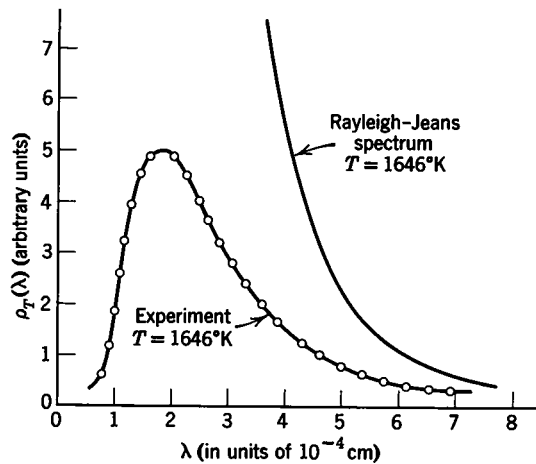
la distribuzione di probabilità di Boltzmann, che indica la probabilità che uno stato di energia E sia occupato alla temperatura T. L'integrale tiene conto della distribuzione continua dei possibili stati energetici. L'uso di quest adistribuzione deriva dal fatto che le onde e.m. presenti nella cavità sono generate dalle oscillazioni di cariche sulla superficie, la cui energia dipende dalla distribuzione di Boltzmann.

In questo modo la densità di energia contenuta nella cavità del corpo nero, le cui pareti si trovano a temperatura T, nell'intervallo di lunghezze d'onda λ e $\lambda+d\lambda$, è data da:

$$u_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda = \frac{8\pi k}{\lambda^5} \lambda T d\lambda$$

dove k è la costante di Boltzmann. Come si vede questa equazione ha la forma funzionale prevista da Wien: $f(\lambda T) = 8\pi k \lambda T$

Ma confrontando i dati sperimentali con la curva della legge di Rayleigh-Jeans si osserva una buona corrispondenza solo per grandi valori di λ (infrarosso) mentre per piccoli valori di λ (ultravioletti) la curva teorica diverge (catastrofe ultravioletta). Infatti, integrando la funzione $u_T(\lambda)$ tra 0 e infinito per ottenere l'energia totale emessa per unità di tempo e di area, si ottiene un valore infinito!



re 2-11. A comparison of the Rayleigh-Jeans spectrum and experiment.

Fig. Confronto tra dati sperimentali dell'emmissione da corpo nero e la curva di Rayleigh-Jeans.

Nel 1901 Planck (Nobel 1918), conservando il calcolo delle onde e.m. stazionare presenti nella cavità, cambiò completamente il calcolo dell'energia media di ogni onda, introducendo un concetto completamente nuovo: la quantizzazione dell'energia. Infatti suppose che:

“ogni entità fisica che compie oscillazioni armoniche può avere energia totale in termini di multipli interi della frequenza di oscillazione ν :

$$E = n h \nu$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$ ed $h =$ costante universale (detta poi costante di Planck).

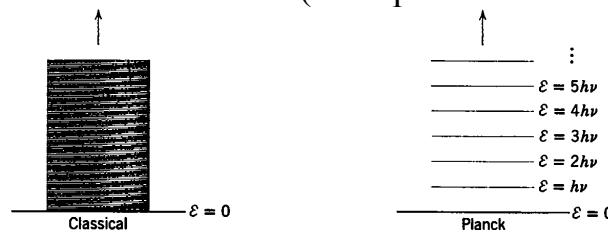


Fig. Diagrammi di energia per un oscillatore armonico secondo la visione classica (sinistra) e di Planck (destra)

Utilizzando la distribuzione di probabilità di Boltzmann e considerando che l'energia media \bar{E} , nel caso di una distribuzione discreta di stati, è data da:

$$\bar{E} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} EP(E)}{\sum_{n=0}^{\infty} P(E)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu Ae^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} Ae^{-\frac{nh\nu}{kT}}} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{hc/\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

si ottiene l'equazione di Planck sulla densità di energia che si trova all'interno della cavità del corpo nero:

$$u_T(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda$$

Con questa equazione si riesce a riprodurre perfettamente i risultati sperimentali (vedi Fig.) imponendo alla costante h il valore:

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

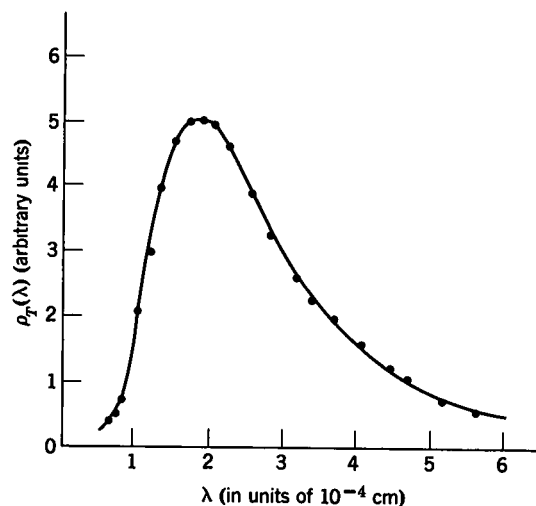


Figure 2-13. A comparison of Planck's spectrum and experiment. The dots are experimental and the curve is theoretical. $T = 1646^\circ\text{K}$.

Fig. Confronto tra la densità di energia calcolata dall'eq. di Planck (linea continua) e i dati sperimentali (punti).

Il risultato ottenuto da Planck è considerato il primo passo verso l'introduzione della meccanica quantistica.

Domanda: ma un oscillatore classico (pendolo) obbedisce alla stessa legge (cioè perde energia in "quanti" pari a $h\nu$ (o suoi multipli) ?

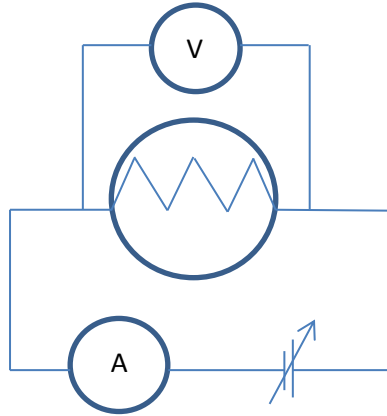
Pendolo $l=1\text{m}$, $m=10^{-2} \text{ kg}$, $\theta = 5^\circ \rightarrow E_{\text{tot}} = mgl(1-\cos\theta) = 3.7 \times 10^{-4} \text{ J}$

Usando la teoria di Planck: $T=2\text{s}$, $\nu=0.5\text{s}^{-1}(\text{Hz})$, $E=h\nu = 3.8 \times 10^{-34} \text{ J}$

Verifica sperimentale della legge di Stefan

$$I = e\sigma T^4$$

Si misura la potenza dissipata da un filamento di una lampadina percorso da corrente elettrica, misurando la corrente (I) che passa nel filamento e la differenza di potenziale (V) ai capi del filamento stesso.



$$P = VI \text{ (I in questo caso è la corrente elettrica!!)}$$

Inoltre la resistenza elettrica è data da $R=V/I$ e $R(T)=R(T_0)[1-\alpha(T-T_0)]$, con l'ipotesi che lunghezza e sezione del filamento non variano con T .

dove $R(T)$ = resistenza a T e $R(T_0)$ = resistenza a T_0 e α =coefficiente di temperatura (nel caso del tungsteno $\alpha= 4.5 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$)-

Misurando la $R(T_0)$ per una I molto piccola si può supporre che T_0 = temperatura ambiente.

Misurando V ed I per valori diversi fino all'incandescenza della lampadina, si può determinare la temperatura della lampadina T dal valore di $R(T)=V(T)/I(T)$ e il valore di $P(T)=V(T)I(T)$

Per ogni valore di T si può pertanto determinare $P(T)$.

Trascurando la dissipazione termica verso i contatti si può supporre che la potenza sviluppata sia dissipata per irraggiamento.

Quindi se $P(T)=AT^B$, passando ai logaritmi: $\ln P(T)=\ln A+B \ln T$.

Graficando su scala log-log e facendo un fit lineare si può determinare l'esponente B .

In generale $B \sim 3.3-3.5$

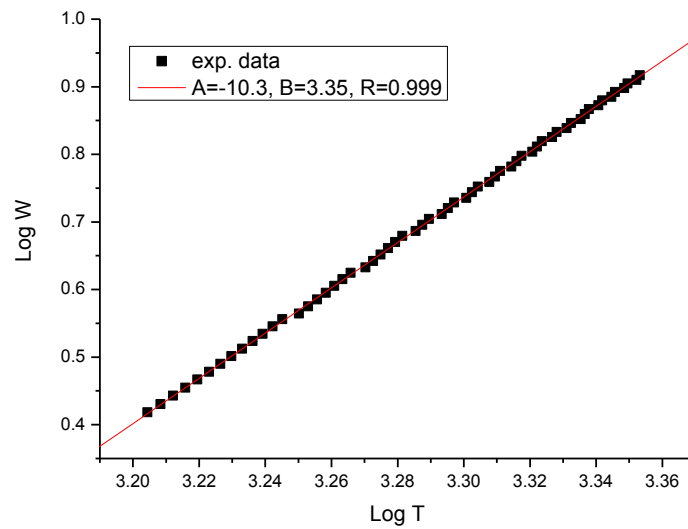


Fig. Esempio di risultati sperimentali con fit lineare

Link:

<http://physics.gmu.edu/~ellswort/p263/steboltz.pdf>

http://studenti.fisica.unifi.it/~carla/varie/Stefan-Boltzmann_law_in_a_light_bulb.pdf

Effetto fotoelettrico

Alla fine del XIX secolo vennero eseguiti diversi esperimenti sul passaggio di una corrente elettrica (raggi catodici) all'interno di gas rarefatti (Lenard 1890).

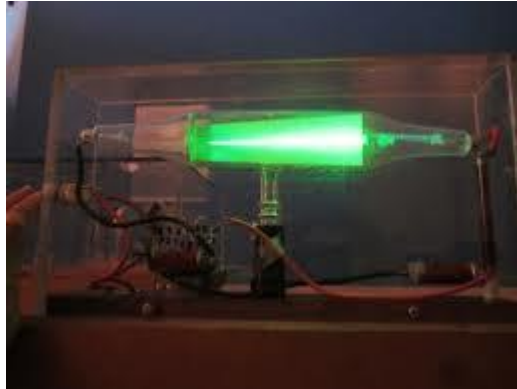


Fig. Luce emessa da un gas a bassa pressione quando è applicata un'alta differenza di potenziale tra 2 elettrodi (catodo e anodo).

Tra i vari esperimenti si possono ricordare:

Perrin (1895): i raggi catodici sono elettroni

Thomson (1897): determinazione di q/m per gli elettroni

Townsend e Thomson (1900) e di Millikan (1909): carica q di un elettrone

Nel 1887 Hertz mostrò che illuminando con luce UV un emettitore (catodo) di metallo e polarizzando un altro elettrodo collettore (anodo) positivamente rispetto al catodo si misurava una corrente elettrica tra catodo e anodo.

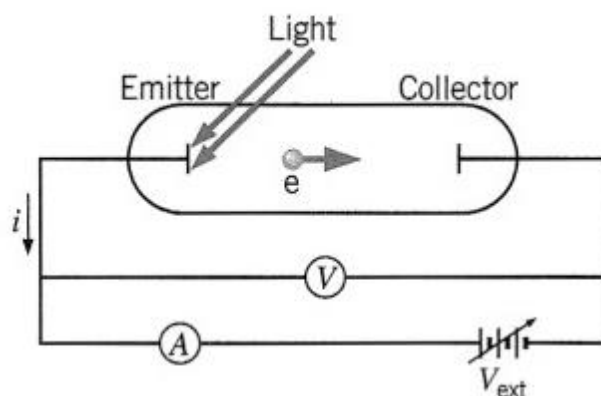


Fig. Schema dell'apparato sperimentale per l'effetto fotoelettrico

L'intensità di questa corrente dipende:

- dall'intensità della luce utilizzata (maggiore è l'intensità, maggiore la corrente)
- dalla tensione di polarizzazione (polarizzando l'anodo negativamente rispetto al catodo la corrente diminuisce fino ad annullarsi, tensione massima, V_s) (Fig. successiva)

Inoltre:

- il valore della tensione di soglia è indipendente dall'intensità della luce UV utilizzata;
- l'emissione di luce è praticamente immediata (esperimenti nel 1928 $t < 10^{-9}$ s);
- cambiano la frequenza della luce UV cambia la tensione massima V_s (Fig.)

Invece, utilizzando la luce visibile, indipendentemente dalla intensità della sorgente e dalla polarizzazione applicata, non si osserva passaggio di corrente.

Esiste pertanto una frequenza di soglia, ν_{lim} , sotto la quale non si osserva passaggio di corrente e, oltre la quale la corrente dipende dall'intensità della luce incidente e dalla differenza di potenziale applicata.

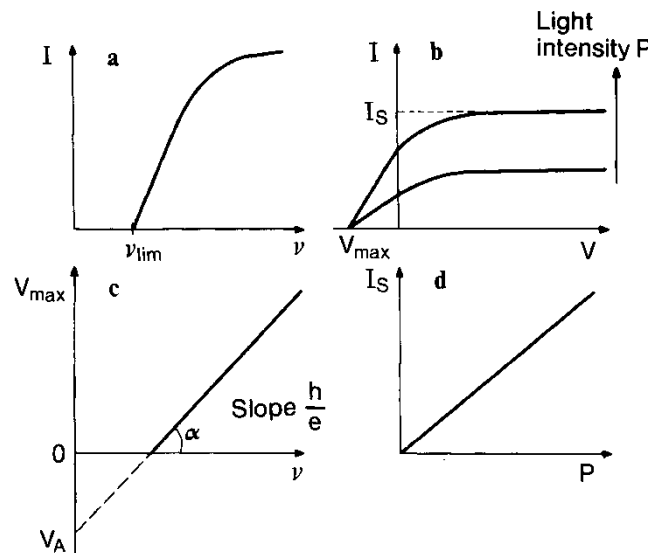


Fig. a) andamento della corrente (I) in funzione della frequenza della luce incidente (ν); b) dipendenza della corrente dall'intensità della luce incidente (per $\nu > \nu_{lim}$); c) dipendenza della differenza di potenziale massima (V_{max}) dalla frequenza della luce incidente; d) dipendenza della corrente di saturazione (I_s) dalla intensità della luce incidente

Interpretazione classica:

- Le onde e.m. vengono assorbite e cedono la loro energia, agli elettroni contenuti nel metallo (la loro presenza è nota da Thomson);
- Gli elettroni acquistano energia cinetica media:

$$\overline{E_k} \sim A^2 \sim E^2 \sim (\sqrt{I})^2$$

Essendo:

$$\overline{E_k} = \int_0^T \frac{1}{2} m v^2 dt = \int_0^T \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \frac{T}{2}$$

con $x = A \sin(\omega t)$

$$e \quad I = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c (E_{0y}^2 + E_{0z}^2) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle$$

- Quando si ha emissione di elettroni, la corrente misurata è proporzionale alla intensità della sorgente di onde e.m.
- il potenziale massimo di frenamento V_{\max} dà un limite all'energia cinetica massima degli elettroni emessi dal catodo: $qV_{\max} = \frac{1}{2} m v^2$

Problemi nell'interpretazione classica:

- non è in grado di spiegare l'esistenza della frequenza limite ν_{lim} : se $\overline{E_k} \sim (\sqrt{I})^2$ aumentando I dovrebbe aumentare $\overline{E_k}$ e quindi gli elettroni dovrebbero essere emessi per qualunque frequenza, supposto che I sia sufficientemente grande;
- non è in grado di spiegare perché V_{\max} è indipendente dall'intensità della sorgente di onde e.m.
- non è in grado di spiegare l'emissione "istantanea" degli elettroni: classicamente dal peso atomico (A), n. Avogadro (N_A) e densità (ρ)

$$\text{massa atomo} = \frac{A}{N_A}, \quad \text{vol. atomo} = \frac{\text{massa atomo}}{\rho} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

La sezione d'urto: $\sim r^2$, l'energia emessa da una sorgente isotropa (a $L=1\text{m}$) che colpisce l'atomo (al secondo):

$$P_c (W) = \frac{\text{densità di energia emessa}}{\text{secondo}} \times \text{sezione d'urto}$$

$$\text{con: } \frac{\text{densità di energia emessa}}{\text{secondo}} = \frac{\text{potenza emessa}}{4\pi L^2}$$

Supponendo: $A=100$, $N_A=6 \times 10^{23}$, $\rho=10^4 \text{ kg/m}^3$, $L=1\text{m}$, potenza emessa=1W, $V_{\max}=1\text{V}$ ($qV_{\max}=10^{-19} \text{ J}$), si ha che $P_c(W) \sim 10^{-21} \text{ Js}^{-1}$

e, quindi, il tempo necessario per l'emissione degli elettroni

$$t = \frac{qV_{\max}}{P_c} = 10^2 \text{ s}$$

Spiegazione di Einstein (1905, Nobel 1921):

- la luce è emessa sotto forma di “particelle”, detto fotoni (emessi da un sistema oscillante che obbedisce all’idea di Planck) che si propagano alla velocità della luce, c , e quindi non si “allargano” come un’onda;
- l’energia è data da $E(\text{fotone}) = h\nu$, con h =costante di Planck;
- nel processo fotoelettrico il fotone è completamente assorbito dall’elettrone;
- l’elettrone per essere emesso deve acquistare una energia minima pari a $W = h\nu_{\text{lim}} =$ funzione lavoro o di estrazione (work function), nessuna emissione per $\nu < \nu_{\text{lim}}$
- $E_K(\text{max}) = qV_{\text{max}} = h\nu - W$

Queste ipotesi spiegano tutti i risultati sperimentali e introducono il primo esempio di dualismo onda-particella: luce (onda) \rightarrow fotone (particella)

Verifica sperimentale dell'effetto fotoelettrico



Fig. a)



Fig. b)

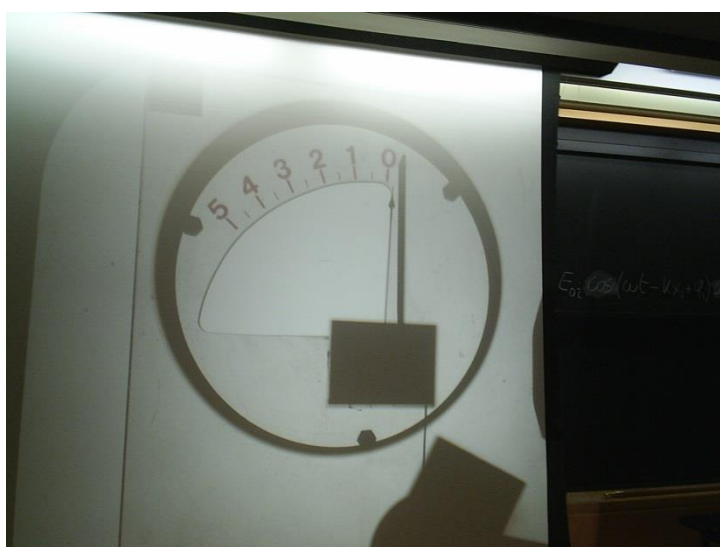


Fig. c)

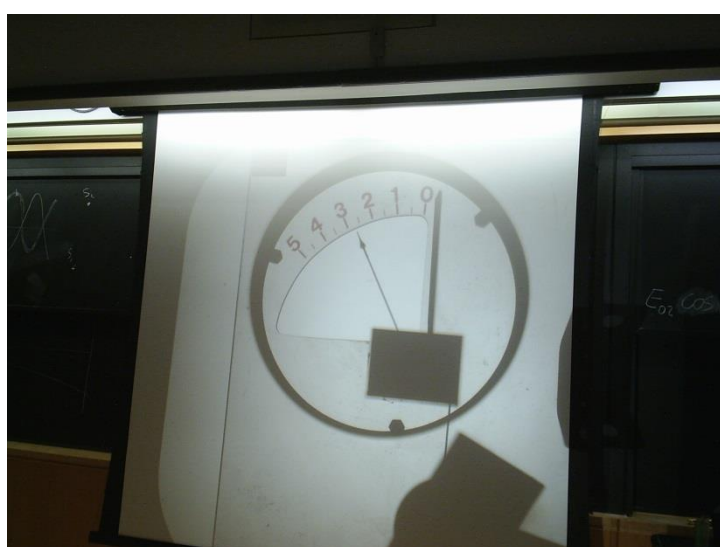


Fig. d)

Figs. Apparato sperimentale per la dimostrazione dell'effetto fotoelettrico:

- Lavagna luminosa
- Elettroscopio
- Lamina di piombo (zinco)
- Lampada UV (battericida) e VIS
- Panno di lana,

<https://www.youtube.com/watch?v=4bscKD7V0Vg>

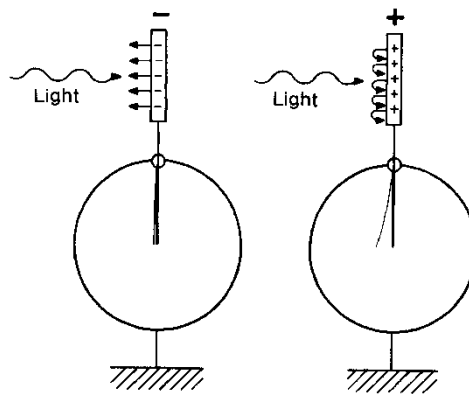


Fig. Se l'elettrometro è carico negativamente la luce UV lo scarica, se è carico positivamente la luce UV ha effetto.

Applicazioni dell'effetto fotoelettrico:

- Spettroscopia di fotoemissione X e UV (XPS, UPS)
http://oldphysicscom.unimore.it/materiale_didattico/fotoelettrico/La%20spettroscopia%20di%20fotoemissione.pdf
- Rivelatori di luce (fotomoltiplicatori, fotodiodi)
<http://www.ba.infn.it/~garuccio/didattica/fotoelettrico/applicazioni/applicazioni.htm>
- Celle fotovoltaiche (?)

Esperimento di Compton

Nel 1923 A. Compton osservò che raggi X, dopo aver “colpito” un sottile foglio metallico possono essere deviati.

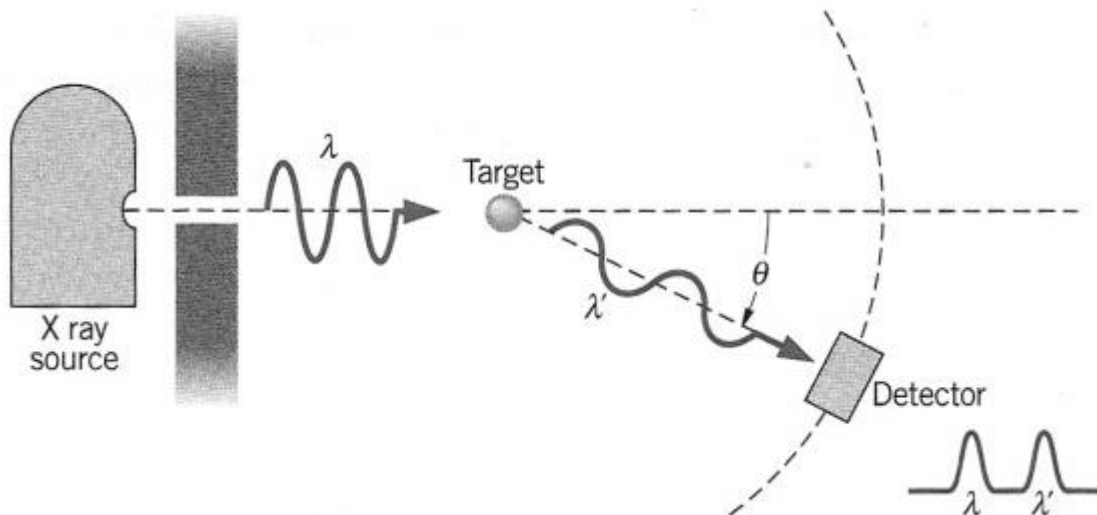


Fig. Schema dell'esperimento di diffusione di raggi X (scattering Compton)

Sperimentalmente, inviando raggi X di lunghezza d'onda monocromatica λ_0 contro il foglio metallico, si osservavano i seguenti risultati:

- I raggi X misurati dopo il foglio metallico ad un angolo di deviazione nullo (in trasmissione) hanno la stessa lunghezza d'onda dei raggi X incidenti, λ_0 ;
- Se spostiamo il detector di un angolo θ rispetto alla direzione di incidenza si osservano raggi X di due lunghezze d'onda, λ_0 e λ_1 , con $\lambda_1 > \lambda_0$;
- La differenza $\lambda_1 - \lambda_0$ dipende dall'angolo al quale vengono misurati i raggi X, θ ;
- I risultati sono indipendenti dal foglio metallico utilizzato come bersaglio (successivamente Compton osservò gli stessi risultati usando raggi γ) pertanto la diffusione dipende dall'interazione dei raggi con gli elettroni

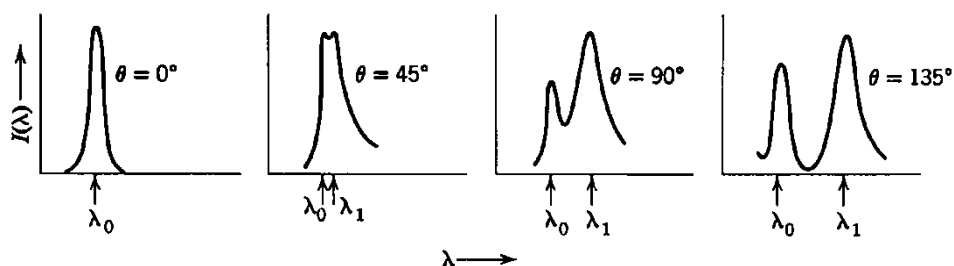


Fig. Spettri dei raggi X diffusi da un foglio di carbone a vari angoli

La spiegazione di Compton (Nobel 1927): i raggi X essendo fotoni, dalla teoria di Einstein, hanno energia :

$$E = h \nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Pertanto

$$E_0 = \frac{hc}{\lambda_0} > E_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$$

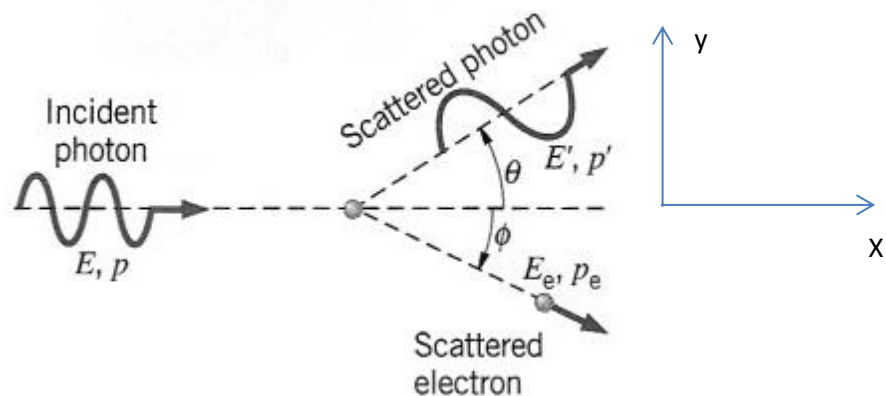
Quindi i fotoni con λ_1 hanno perso energia nella diffusione.

Compton pertanto spiegò il fenomeno come un urto tra 2 particelle, il fotone e 1 elettrone (di valenza, quindi quasi libero, ma fermo) e utilizzò le equazioni dell'urto: conservazione dell'energia e della quantità di moto:

$$E + m_0 c^2 = E' + E_e$$

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e$$

con m_0 = massa a riposo dell'elettrone, E, p e E', p' l'energia e il momento del fotone prima e dopo l'urto, E_e e p_e l'energia e il momento dell'elettrone dopo l'urto.



Scomponendo i vettori quantità di moto nelle 2 componenti, la conservazione di p diventa:

$$p = p' \cos \theta + p_e \cos \phi \quad \text{componente x}$$

$$0 = p' \sin \theta - p_e \sin \phi \quad \text{componente y}$$

Per le energie, utilizzando le equazioni relativistiche:

$$E^2 = c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2$$

si ottiene:

per il fotone: $E = c p \rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

per l'elettrone: $E_e^2 = c^2 p_e^2 + (m_0 c^2)^2$

Inoltre per l'elettrone, dalla meccanica relativistica:

$E_e = E_K + m_0 c^2$ con E_K = energia cinetica dell'elettrone

quindi la conservazione dell'energia diventa:

$$E + m_0 c^2 = E' + E_e$$

$$E + m_0 c^2 = E' + E_K + m_0 c^2$$

$$E = E' + E_K$$

$$E_K = E - E' = c p - c p' = c(p - p')$$

Dalle equazioni per il momento, facendo il quadrato e sommando, si ottiene:

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta$$

Pertanto l'equazione dell'energia per l'elettrone si può riscrivere:

$$E_e^2 = c^2 p_e^2 + (m_0 c^2)^2$$

:

$$(E_K + m_0 c^2)^2 = c^2 (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta) + (m_0 c^2)^2$$

$$E_K^2 + (m_0 c^2)^2 + 2E_K m_0 c^2 = c^2 (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta) + (m_0 c^2)^2$$

$$E_K^2 + 2E_K m_0 c^2 = c^2 (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta)$$

$$c^2 (p - p')^2 + 2c(p - p')m_0 c^2 = c^2 (p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta)$$

$$m_0 c (p - p') = pp' (1 - \cos \theta)$$

$$p - p' = \frac{pp'}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

Essendo $p = \frac{h}{\lambda}$ pertanto: $\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{h}$ da cui:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta)$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta)$$

Con $\lambda_c =$ lunghezza d'onda di Compton = 2.426×10^{-12} m

Da notare che $\lambda' - \lambda$ dipende solo dall'angolo θ e non dipende da λ o dal materiale!

La teoria di Compton spiegò perfettamente i dati sperimentali.

La teoria di Compton è la dimostrazione più evidente dell'esistenza dei fotoni e della loro natura duale: onde – particelle.

Successivi esperimenti hanno provato a distinguere le due nature ma senza successo.

Successivamente De Broglie (1924) propose che, simmetricamente, anche le particelle avessero natura ondulatoria, proponendo che la lunghezza d'onda fosse collegata alla quantità di moto:

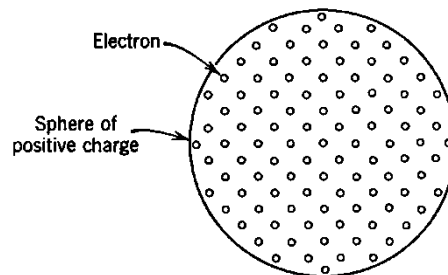
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

La dimostrazione sperimentale fu data da Davisson and Germer (1927)

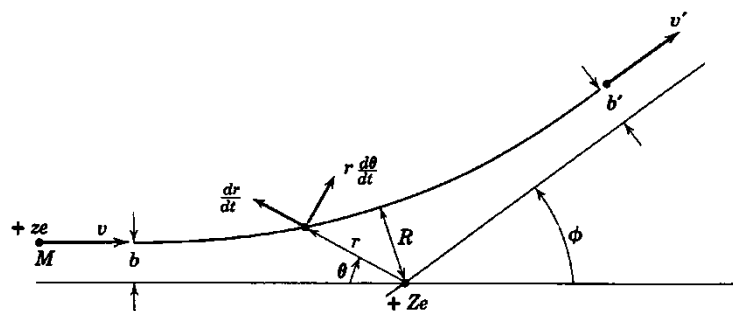
Modello di Bohr

All'inizio del 1900 si pose il problema di come fosse strutturato l'atomo:

- l'esperimento di Thomson (1897) sull'emissione di elettroni da parte di un catodo dimostrò che gli atomi contenevano elettroni;
- gli atomi sono neutri quindi devono contenere un ugual numero di elettroni e protoni;
- conoscendo q/m degli elettroni e il peso atomico si sapeva che gran parte della massa è concentrata sui protoni
- il modello di Thomson prevedeva che l'atomo fosse costituito da una "marmellata" di cariche elettriche positive e da elettroni



- l'esperimento di Rutherford (1911) sullo scattering di particelle α da parte di atomi mostrò invece che la carica positiva deve essere concentrata al centro dell'atomo, in una zona di raggio $R \sim 10^{-14}$ m (l'atomo ha dimensioni $R \sim 10^{-10}$ m, determinato dal numero di Avogadro e dalla densità dei materiali)



- gli atomi sono (in generale) stabili nel tempo, cioè non si "dividono" in parti più piccole
- gli atomi possono emettere o assorbire onde elettromagnetiche

Quest'ultima affermazione deriva da esperimenti di assorbimento ed emissione di onde e.m.

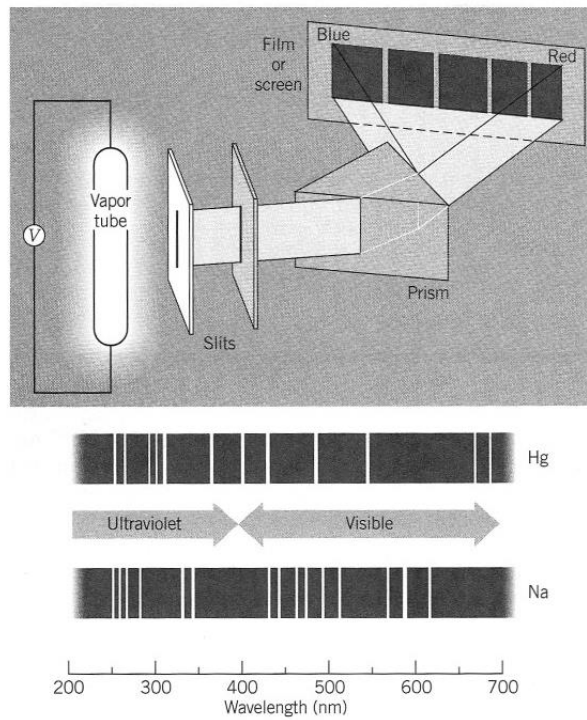


Fig. Apparato sperimentale per misure di spettri di emissione di gas ad alta temperatura

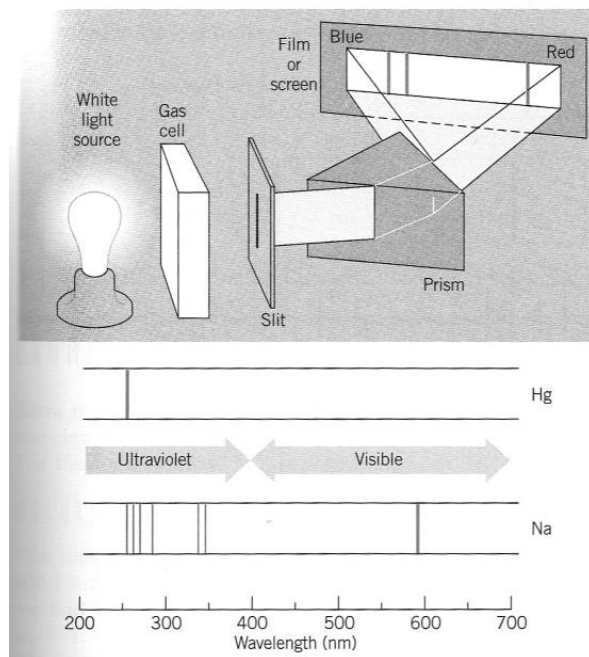
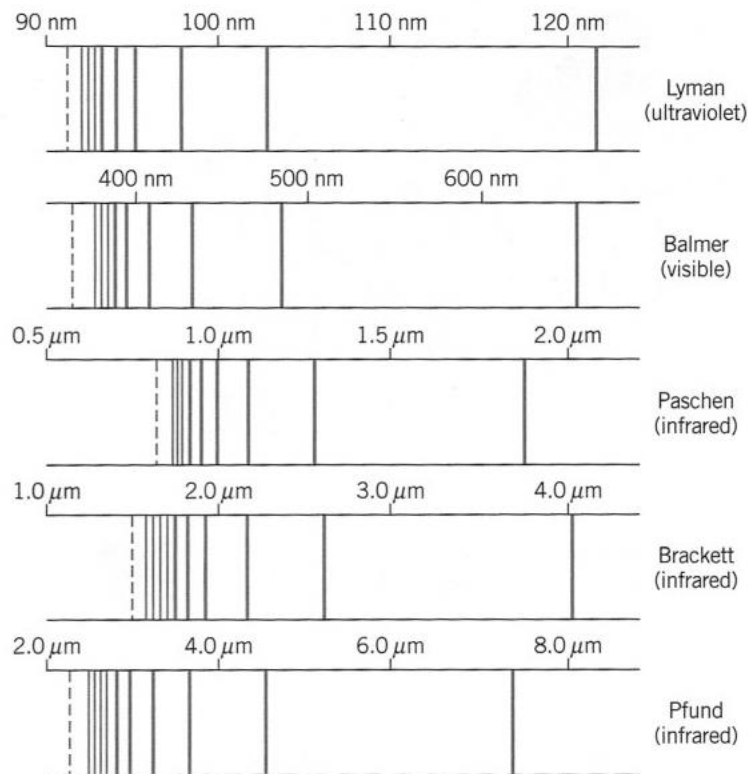


Fig. Apparato sperimentale per misure di spettri di assorbimento di gas.

In particolare per l'idrogeno si osservano delle "serie" di righe, cioè dei gruppi di righe abbastanza vicine tra loro:



Gli spettri riportati sono osservati in emissione, mentre in assorbimento si osserva solo la serie di Lyman. La linea tratteggiata indica la linea limite (con lunghezza d'onda λ_{lim}).

Sperimentalmente si ottiene che per tutte le serie dell'idrogeno le lunghezze d'onda delle righe osservate soddisfano la regola:

$$\lambda = \lambda_{lim} \frac{n^2}{n^2 - n_0^2} \quad n = n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots$$

Dove:

Lyman (UV): $n_0 = 1$, $\lambda_{lim} = 911 \text{ \AA}$

Balmer (Vis): $n_0 = 2$, $\lambda_{lim} = 3646 \text{ \AA}$

Paschen (IR): $n_0 = 3$, $\lambda_{lim} = 8201 \text{ \AA}$

Brackett (IR): $n_0 = 4$, $\lambda_{lim} = 14588 \text{ \AA}$

Pfund (IR): $n_0 = 5$, $\lambda_{lim} = 22794 \text{ \AA}$

Un altro modo di identificare le righe è attraverso il numero d'onda $k = \frac{1}{\lambda}$

In termini di numero d'onda, per le diverse serie si ha:

$$k = R_H \left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{con } R_H = \text{costante di Rydberg } (109677 \text{ cm}^{-1})$$

$n_0 = 1$ (Lyman), 2 (Balmer)...

$n = n_0+1, n_0+2, n_0+3..$

Postulati di Bohr (1913):

1. Un elettrone in un atomo si muove su un'orbita circolare intorno al nucleo per effetto della forza coulombiana tra l'elettrone e il nucleo e obbedisce alle leggi della meccanica classica
2. L'elettrone può orbitare solo in quelle per cui il suo momento angolare (o momento della quantità di moto) L è un multiplo intero della costante di Planck diviso 2π : $L=nh/2\pi=n\hbar$, con $n=1,2,3...$ (quantizzazione di L)
3. Nonostante il fatto che l'elettrone ruotando in orbite circolari è accelerato (accelerazione centripeta), non emette onde elettromagnetiche, e, quindi, la sua energia rimane costante
4. Onde elettromagnetiche (e.m.) possono essere emesse solo se l'elettrone in un'orbita con energia E_i improvvisamente "salta" su un'orbita di energia (inferiore) E_f (transizione dallo stato E_i allo stato E_f). In questo caso l'onda e-m emessa ha frequenza data da:

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h}$$

Da questi postulati e le leggi della meccanica classica si determinano le energie e i raggi delle orbite (livelli o stati) permesse:

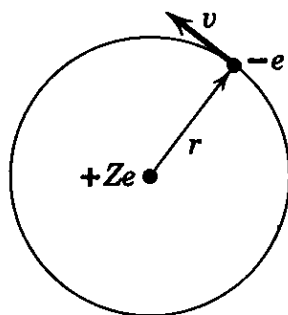


Fig. elettrone che ruota attorno al nucleo

Dal 1° postulato, uguagliando la forza centripeta e la forza coulombiana:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

Dal 2° postulato:

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v}$$

Che per un moto circolare ($\bar{r} \perp \bar{v}$) $\rightarrow L = mrv = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$
 $\rightarrow v = \frac{n\hbar}{mr}$

Quindi : $r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{me^2}$ con $n = 1, 2, 3, \dots$; $v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}$

Per $n=1$ $r_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 5.3 \times 10^{-10}$ m raggio di Bohr (a_0)

Per calcolare l'energia dell'elettrone, si sommano l'energia cinetica e l'energia potenziale:

$$E = K + U$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{e^2}{r^2} dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

Pertanto $E = K + U = - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$

$$E_n = - \frac{m e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = - \frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m e^2} n^2 = a_0 n^2$$

Energia quantizzata !

Il modello funziona anche per atomi idrogenoidi, ovvero con Z protoni nel nucleo ed 1 solo elettrone, basta sostituire ad e^2 il termine $Z e^2$.

$n=1$: stato fondamentale (ground state), per $n>1$ stati eccitati

La quantizzazione dell'energia dimostrata sperimentalmente da Franck-Hertz (1914)

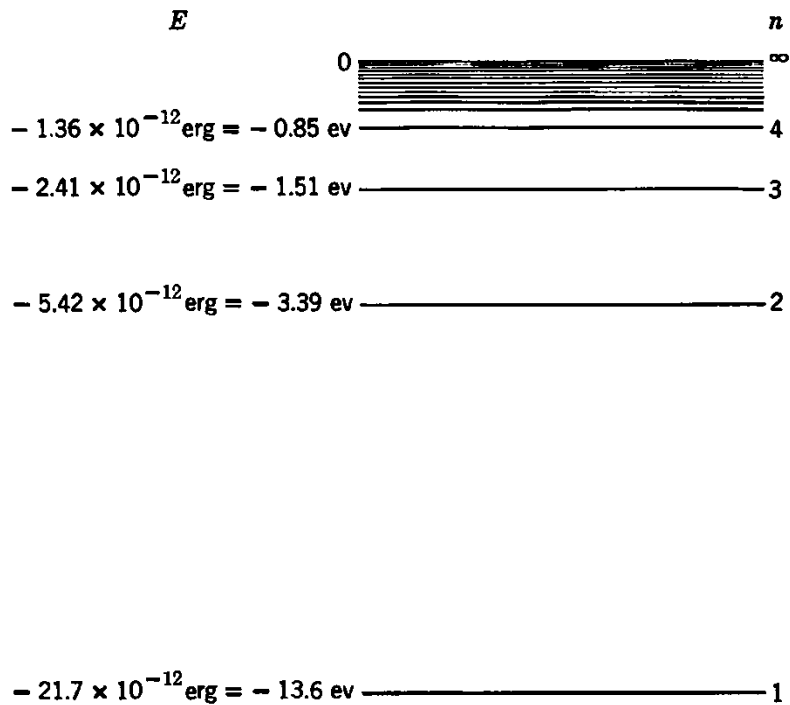


Fig. Livelli energetici (energia degli stati) di un atomo di idrogeno

Dalle E_n , utilizzando il 3° e 4° postulato si ottengono le righe di emissione/assorbimento osservate sperimentalmente:

$$h\nu = E_i - E_f$$

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{1}{h} \left\{ \left(-\frac{m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n_i^2} \right) - \left(-\frac{m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n_f^2} \right) \right\}$$

$$\nu = \frac{1}{h} \left(\frac{m e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \right) = \frac{m e^4}{64\pi^3 \varepsilon_0^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{64\pi^3 \varepsilon_0^2 \hbar^3 c}{m e^4} \left(\frac{n_i^2 n_f^2}{n_i^2 - n_f^2} \right)$$

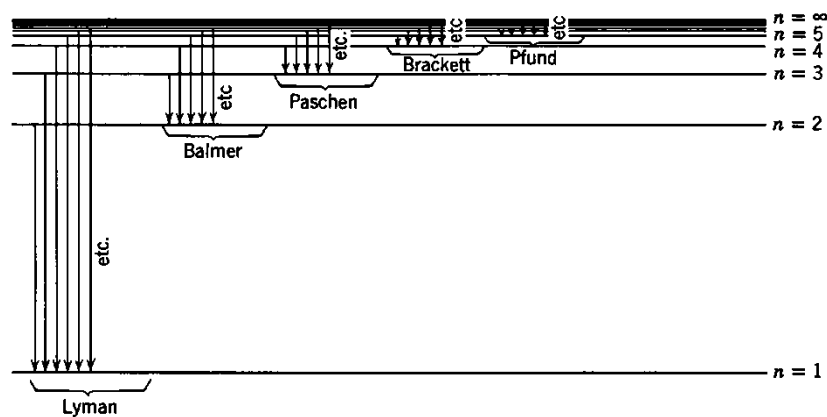
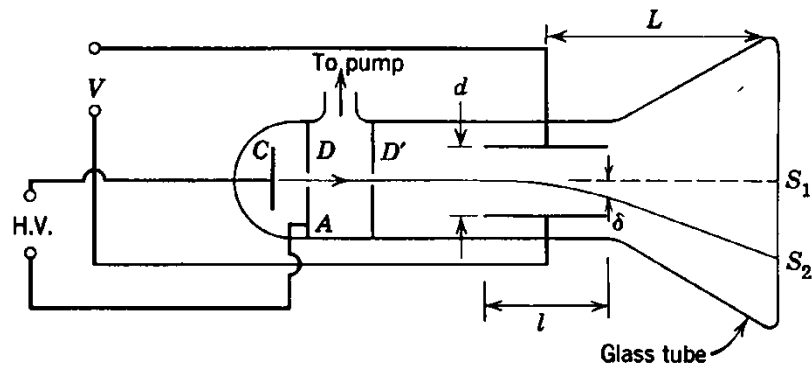


Fig. Transizioni per l'atomo di idrogeno

Principali limiti del modello di Bohr (già noti al tempo del modello):

1. Non funziona per atomi a più elettroni
2. Non spiega i multipletti (righe osservate sperimentalmente molto vicine tra loro)
3. Non da indicazioni sull'intensità delle righe
4. Non spiega il perché dei postulati !
5. Perché gli elettroni in rotazione non emettono ?

Esperimento di Thomson



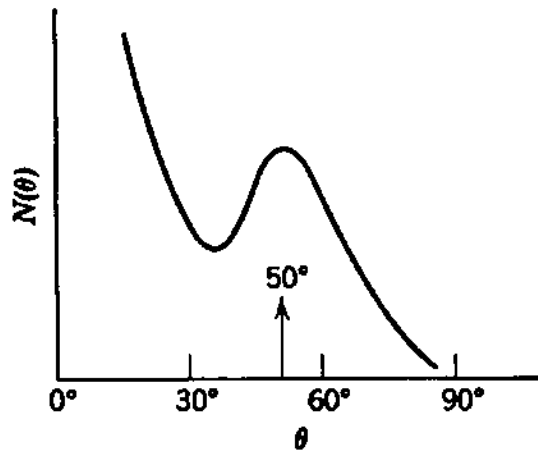
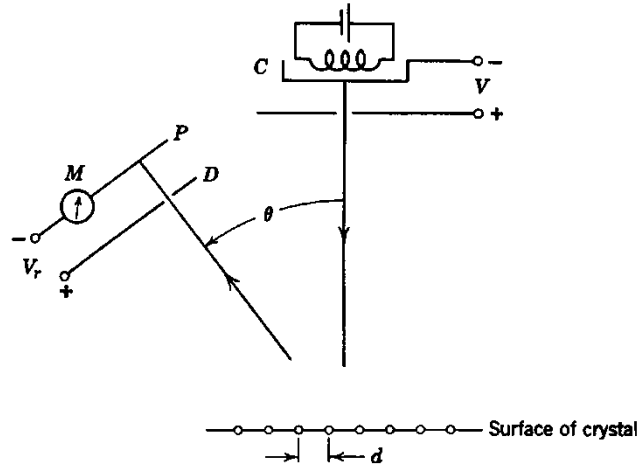
Lo spostamento dello spot luminoso sullo schermo per effetto del potenziale elettrostatico V è dato da:

$$\overline{S_1 S_2} = \frac{q}{m} \frac{V}{d} \frac{L}{l} \left(\frac{l}{v} \right)^2$$

Per determinare la velocità v , si introduce un campo magnetico B perpendicolare al piano. Lo spot luminoso non subisce variazioni rispetto al punto S_1 se la forza di Lorentz è uguale alla forza elettrostatica:

$$\frac{qV}{d} = qvB$$

Esperimento di Davisson e Germer



Cristallo di Ni, $E(e^-) = 54 \text{ eV}$

Esperimento di Franck-Hertz

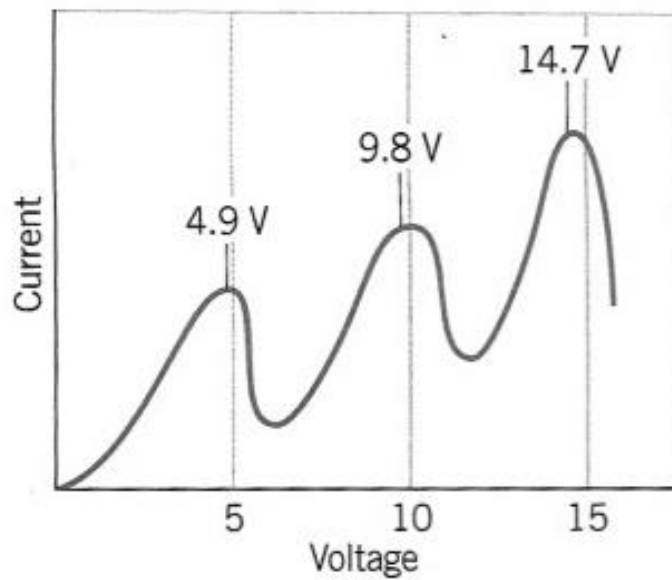
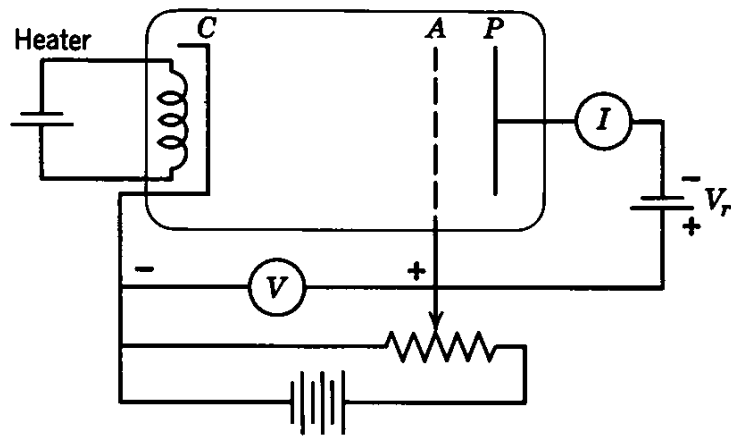


FIGURE 6.24 Result of Franck-Hertz experiment using mercury vapor. The current drops at voltages of 4.9 V, 9.8 V ($= 2 \times 4.9$ V), 14.7 V ($= 3 \times 4.9$ V).