Prisma: legge di Cauchy

Per determinare la relazione tra l'indice di rifrazione e la lunghezza d'onda delle onde e-m si utilizza un modello classico molto semplice, valido per atomi in un gas ma che è comunque anche a solido quali il vetro.

Riferimenti:

P. Mazzoldi, M. Nigro, C.Voci, *Fisica*, II volume, EdiSES

G. Bekefi, A.H. Barrett, *Vibrazioni elettromagnetiche, onde e radiazioni*, Zanichelli

F. Wooten *Optical Properties of Solids*, Academic Press

Il moto di un elettrone in un atomo, colpito da un'onda e-m, si può descrivere usando l'equazione di un oscillatore armonico forzato-smorzato

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = qE$$

Con:

$E = E_0 e^{-i\omega t}, \gamma = termine\ di\ smorzamento, k = costante\ elastica.$

Introducendo: $\beta = \frac{\gamma}{m}$ e $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $abbiamo$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m}E_0 e^{-i\omega t}$$

Supponendo una soluzione stazionaria (dopo il transiente):

$$x(t) = x_0\, e^{-i\omega t}$$

si ottiene (come si può facilmente verificare sostituendo la soluzione proposta nell'equazione):

$$x_0 = \frac{qE_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\beta\omega}$$

Introduciamo il momento di dipolo indotto:

$$p(t) = qx(t) = \frac{q^2E_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\beta\omega}\, e^{-i\omega t}$$

Definiamo la polarizzabilità $\tilde{\alpha}$ (l'accento ~ indica una grandezza complessa):

$$\vec{p} = \tilde{\alpha}\,\vec{E}$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{q^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\beta\omega}$$

L'espressione della polarizzabilità è valida per piccoli campi.

Se abbiamo N atomi (tutti uguali) per unità di volume, si definisce la polarizzazione $\vec{P}$:

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\tilde{\alpha}\,\vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{q^2 N}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\beta\omega}\,\vec{E}$$

Introducendo il vettore spostamento $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \tilde{\varepsilon}\,\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi N\tilde{\alpha}\,\vec{E} = (1 + 4\pi N\tilde{\alpha})\,\vec{E}$$

$\tilde{\varepsilon} = 1 + 4\pi N\tilde{\alpha}$ costante dielettrica complessa !

$$\tilde{\varepsilon} = 1 + \frac{4\pi N q^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\beta\omega}$$

Indice di rifrazione (complesso):

$$\tilde{n} = n + ik$$

$con\ n = \frac{c}{v}$ essendo v= velocità dell'onda e-m nel mezzo.

Definiamo

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 + i\,\varepsilon_2$$

e

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\varepsilon}\,\mu$$

con μ=permeabilità magnetica del mezzo. Per materiali non magnetici, come nel nostro caso, μ=1 si ha

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\varepsilon}$$

In questo caso si può dimostrare che:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = n^2 - k^2 \\ \varepsilon_2 = 2nk \end{cases}$$

Dalla espressione di $\tilde{\varepsilon}$ si ottiene:

$$\tilde{\varepsilon} = 1 + \frac{4\pi N q^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}$$

Da questa:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 1 + \dfrac{4\pi N q^2}{m} \dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{4\pi N q^2}{m} \dfrac{\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \end{cases}$$

Dall'equazione:

$$\tilde{n}^2 = \tilde{\varepsilon} \quad \tilde{n} = \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = \sqrt{1 + (\tilde{\varepsilon} - 1)} = [1 + (\tilde{\varepsilon} - 1)]^{1/2}$$

Se $\tilde{\varepsilon} - 1 \ll 1$ (ovvero $\tilde{\varepsilon} \sim 1$)

$$\tilde{n} = [1 + (\tilde{\varepsilon} - 1)]^{1/2} \sim 1 + \frac{1}{2}(\tilde{\varepsilon} - 1)$$

$$\tilde{n} = n + ik = 1 + \frac{1}{2}(\tilde{\varepsilon} - 1) = 1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + i\,\varepsilon_2 - 1) = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1 + i\frac{1}{2}\varepsilon_2 - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1 + \varepsilon_1}{2} + i\frac{1}{2}\varepsilon_2$$

$$n = \frac{1 + \varepsilon_1}{2}$$

$$k = \frac{\varepsilon_2}{2}$$

$$n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4\pi N q^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}\right] =$$
$$= 1 + \frac{2\pi N q^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}$$

$$k = \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{2\pi N q^2}{m} \frac{\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}$$

La parte reale dell'indice di rifrazione è, come detto prima,:

$$n = \frac{c}{v}$$

Qual è il significato della parte immaginaria k ?

Consideriamo un'onda e-m che si propaga all'interno del materiale caratterizzato da n e k (indichiamo con q il numero d'onda al posto di k per evitare confusione)

$$E = E_0 e^{i(qx - \omega t)}$$

Nel vuoto (n=1): $q = \frac{2\pi}{\lambda}$ $essendo$ $\lambda = \frac{c}{\nu}$ $si\ ha$ $q = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$

Nella materia: $n = \frac{c}{v}$ $essendo$ $\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu}$ $si\ ha$ $q = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{\omega}{c}n$

Supponiamo che q sia complesso (essendo n complesso): $\tilde{q} = \frac{\omega}{c}\tilde{n}$

$$E = E_0 e^{i(\tilde{q}x-\omega t)} = E_0 e^{i\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}x-\omega t\right)} = E_0 e^{i\left[\frac{\omega}{c}(n+ik)x-\omega t\right]} = E_0 e^{i\left[\frac{\omega}{c}nx+i\frac{\omega}{c}kx-\omega t\right]}$$
$$= E_0 e^{-\frac{\omega}{c}kx} e^{i\left[\frac{\omega}{c}nx-\omega t\right]} = E_0 e^{-\frac{\omega}{c}kx} e^{i[qx-\omega t]}$$

L'intensità di un'onda e-m dipende dal quadrato del campo:

$$I \sim E^2 \sim I_0 e^{-2\frac{\omega}{c}kx} = I_0 e^{-\alpha x}$$

Con α= coefficiente di assorbimento. **Quindi la parte immaginaria dell'indice di rifrazione tiene conto dell'assorbimento del materiale**.

$$n = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}$$

Per $\omega_0^2 - \omega^2 \gg \beta\omega$, ovvero per pulsazioni ω lontane dalla pulsazione propria ω_0, si ha:

$$n = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m} \frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\beta^2\omega^2} \sim 1 + \frac{2\pi N q^2}{m} \frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2} = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2} = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2} \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2} \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2}\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{-1}$$

Per $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ (cioè per pulsazioni del campo e-m molto piccole rispetto alla pulsazione di risonanza, stessa approssimazione di sopra):

$$\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{-1} \sim 1-(-1)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

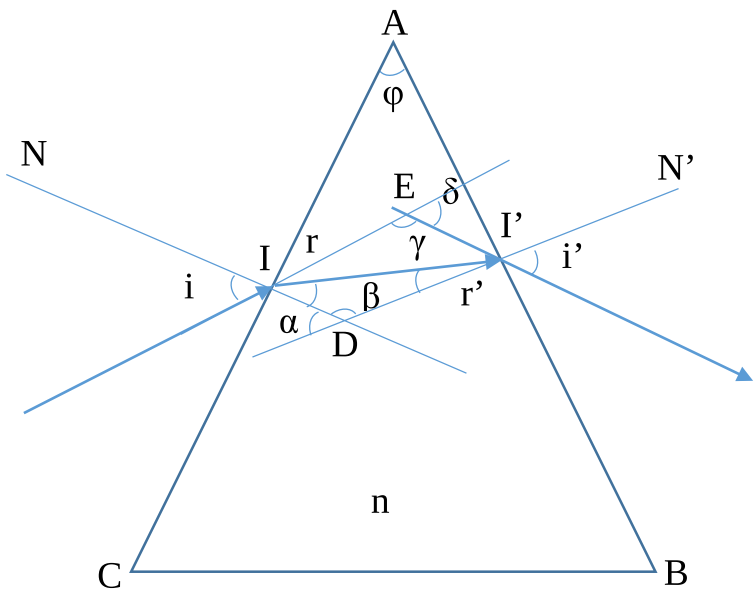
$$n = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2}\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{-1} \sim 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2}\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2} + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2} + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^4}\omega^2 = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2} + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^4}\left(2\pi\frac{v}{\lambda}\right)^2 = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2} + \frac{8\pi^3 N q^2 v^2}{m\omega_0^4}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

con $A = 1 + \frac{2\pi N q^2}{m\omega_0^2}$ e $B = \frac{8\pi^3 N q^2 v^2}{m\omega_0^4}$

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

è nota come equazione di Cauchy, valida anche nei vetri per $\omega \ll \omega_0$ cioè lontano dalla pulsazione di risonanza, ovvero lontana dalla pulsazione di assorbimento (è valida, per esempio, nel visibile).

Come determinare sperimentalmente n(λ)



N= perpendicolare alla superficie di incidenza contenente AC

N'= perpendicolare alla superficie di uscita contenente AB

i = angolo di incidenza rispetto alla normale N

i'= angolo di rifrazione (uscita) rispetto alla normale N'

II' = direzione della luce all'interno del prisma

r = angolo di rifrazione nel punto I (angolo $I'\hat{I}D$)

r' = angolo di incidenza nel punto I' (angolo $I\widehat{I'}D$)

n = indice di rifrazione del vetro

δ = angolo di deviazione, cioè angolo tra la direzione del fascio incidente e quella del fascio in uscita dal prisma

$sen\, i = n\, sen\, r$ (a)

$n\, sen\, r' = sen\, i'$ (b)

Quadrilatero EI'DI: $\gamma + \beta + i' + i = 2\pi$ (c)

Quadrilatero CI'DI: $\varphi + \frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\pi}{2} = 2\pi \;\rightarrow\; \varphi + \beta = \pi \;\rightarrow\; \beta = \pi - \varphi$ (d)

$$\alpha + \beta = \pi \;\rightarrow\; \alpha = \varphi$$

$dalle\ (c)\ e\ (d) \rightarrow\ \gamma + \pi - \varphi + i' + i = 2\pi \;\rightarrow\; \gamma - \varphi + i' + i = \pi$ (e)

$dalla\ (e), essendo\ \gamma = \pi - \delta, \rightarrow\ \pi - \delta - \varphi + i' + i = \pi \;\rightarrow\; \delta = i' + i - \varphi$ (f)

Triandolo IDI’: $r + r' + \beta = \pi \ \rightarrow \ r + r' = \pi - \beta \ \rightarrow dalla\ (d) \ \ r + r' = \varphi$ (g)

$$sen\, i + sen\, i' = n\, sen\, r + n\, sen\, r' = n(sen\, r + sen\, r')$$
$$= 2n\, sen\left(\frac{r + r'}{2}\right) cos\left(\frac{r - r'}{2}\right)$$

Inoltre

$$sen\, i + sen\, i' = 2n\, sen\left(\frac{i + i'}{2}\right) cos\left(\frac{i - i'}{2}\right)$$

Pertanto

$$2n\, sen\left(\frac{i + i'}{2}\right) cos\left(\frac{i - i'}{2}\right) = 2n\, sen\left(\frac{r + r'}{2}\right) cos\left(\frac{r - r'}{2}\right)$$

Usando le (f) ed (g):

$$sen\left(\frac{i + i'}{2}\right) = sen\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) \ \ e \ \ \ sen\left(\frac{r + r'}{2}\right) = sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Abbiamo

$$sen\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) cos\left(\frac{i - i'}{2}\right) = n\, sen\left(\frac{\varphi}{2}\right) cos\left(\frac{r - r'}{2}\right)$$

$$sen\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) = n\, sen\left(\frac{\varphi}{2}\right) \frac{cos\left(\frac{r - r'}{2}\right)}{cos\left(\frac{i - i'}{2}\right)}$$

Se $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{i}' \ \rightarrow sen\, i > sen\, i'$

$$dalle\ (a)\ e\ (b) \rightarrow \ sen\, i - sen\, i' = \ n\, sen\, r - n\, sen\, r' = n(sen\, r - sen\, r')$$

$$sen\, i - sen\, i' = n(sen\, r - sen\, r')$$

Essendo $n > 1 \rightarrow \ sen\, i - sen\, i' > sen\, r - sen\, r' \ \rightarrow i - i' > r - r'$

Pertanto

$$i - i' > r - r' \ \rightarrow \ cos\left(\frac{r - r'}{2}\right) > cos\left(\frac{i - i'}{2}\right) \ \rightarrow \ \frac{cos\left(\frac{r - r'}{2}\right)}{cos\left(\frac{i - i'}{2}\right)} > 1$$

$$sen\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) > n\, sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Se $\boldsymbol{i} < \boldsymbol{i}' \ \rightarrow sen\, i < sen\, i'$

$$dalle\ (a)\ e\ (b) \rightarrow \ sen\, i' - sen\, i = \ n\, sen\, r' - n\, sen\, r = n(sen\, r' - sen\, r)$$

$$sen\, i' - sen\, i = n(sen\, r' - sen\, r)$$

Essendo $n > 1 \rightarrow sen\, i' - sen\, i > sen\, r' - sen\, r \rightarrow i' - i > r' - r$

$$-(i - i') > -(r - r')$$

Pertanto

$$-(i - i') > -(r - r') \rightarrow cos\left[\frac{-(r - r')}{2}\right] > cos\left[\frac{-(i - i')}{2}\right]$$

Ma, poichè $\cos(-x) = \cos(x)$, si ha:

$$cos\left[\frac{-(r - r')}{2}\right] > cos\left[\frac{-(i - i')}{2}\right] \rightarrow cos\left[\frac{(r - r')}{2}\right] > cos\left[\frac{(i - i')}{2}\right]$$

$$\rightarrow \frac{cos\left(\frac{r - r'}{2}\right)}{cos\left(\frac{i - i'}{2}\right)} > 1$$

$$sen\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) > n\, sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Quindi si ha sempre

$$sen\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) > n\, sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Se però $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i'}$ dalle eq. (a) e (b) $\rightarrow r = r'$ pertanto

$$\frac{cos\left(\frac{r - r'}{2}\right)}{cos\left(\frac{i - i'}{2}\right)} = 1$$

$$sen\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) = n\, sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Quindi

$$sen\left(\frac{\delta + \varphi}{2}\right) = valore\ minimo \rightarrow \delta = \delta_{min}\ (essendo\ \varphi = costante)$$

Pertanto si può determinare il valore dell'indice di rifrazione n dall'equazione:

$$n = \frac{sen\left(\frac{\delta_{min} + \varphi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Quindi per ogni lunghezza d'onda λ, mettendosi in condizioni di deviazione minima e misurando l'angolo $\delta_{min}(\lambda)$, si ottiene n(λ).

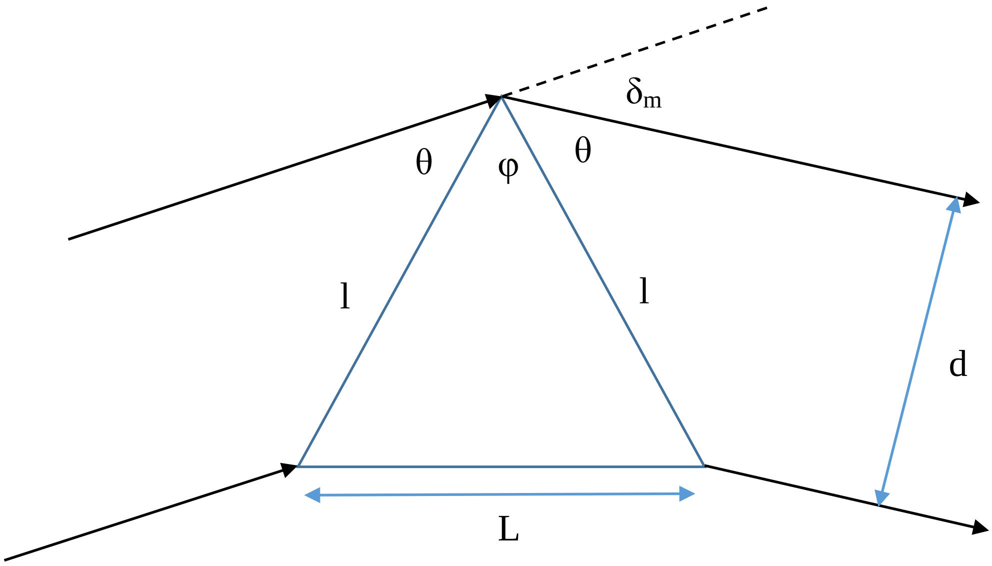
<u>Dispersione angolare</u>: $\frac{d\delta_m}{d\lambda}$ variazione dell'angolo δ_m in funzione di λ.

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{dn}{d\delta_m}\frac{d\delta_m}{d\lambda} \rightarrow \frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{\frac{dn}{d\lambda}}{\frac{dn}{d\delta_m}}$$

$$n = \frac{sen\left(\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \rightarrow \frac{dn}{d\delta_m} = \frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}\right)}{sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{2\,sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}\right)}\frac{dn}{d\lambda}}$$

Dove $\frac{dn}{d\lambda}$ è detto potere dispersivo. In condizioni di δ_m si ha che i due angoli θ sono uguali pertanto abbiamo che:



$$2\theta + \varphi + \delta_m = \pi \rightarrow \delta_m + \varphi = \pi - 2\theta$$

$$\cos\left(\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi-2\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - sen\left(\frac{\pi}{2}\right)sen\theta = sen\theta$$

$$d = l\,sen\theta \rightarrow \cos\left(\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}\right) = sen\theta = \frac{d}{l}$$

$$l\,sen\frac{\varphi}{2} = \frac{L}{2} \rightarrow sen\frac{\varphi}{2} = \frac{L}{2l}$$

$$\frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{2\, sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{cos\left(\frac{\delta_{min}+\varphi}{2}\right)} \frac{dn}{d\lambda} = 2\frac{L}{2l}\ \frac{l}{d}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{L}{d}\frac{dn}{d\lambda}$$

Potere risolutivo: $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ ci dice se possiamo risolvere (vedere separate) 2 righe con lunghezze d'onda distanti Δλ.

Dall'ottica geometrica e ondulatoria si ottiene il criterio di Rayleigh che indica la minima distanza angolare tra 2 oggetti che possono essere distinti:

$$\theta = 1.22\ \frac{\lambda}{D}$$

essendo D= la dimensione della lente (diametro) e λ la lunghezza d'onda usata.

Nel caso di una fenditura si ha che

$$\theta = \frac{\lambda}{D}$$

Nel nostro caso, quindi, 2 lunghezze d'onda sono separabili se la differenza degli angoli δ_m, $\Delta\delta_m$, ai quali si osservano le 2 λ soddisfa il criterio di Rayleigh:

$$\Delta\delta_m = \frac{\lambda}{d}$$

$$\frac{\Delta\delta_m}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{d}\ \frac{1}{\Delta\lambda} = \frac{1}{d}\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

$$\frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{L}{d}\frac{dn}{d\lambda} \sim \frac{\Delta\delta_m}{\Delta\lambda} = \frac{1}{d}\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

$$\frac{L}{d}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{1}{d}\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \rightarrow L\frac{dn}{d\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

$$\boldsymbol{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = L\frac{dn}{d\lambda}}$$

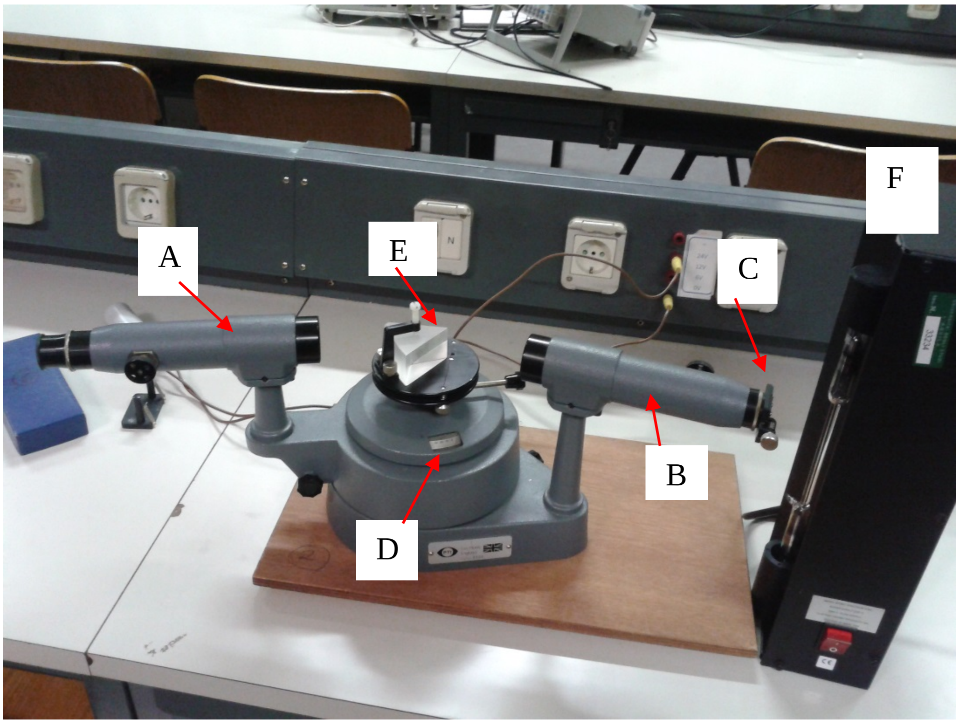
Quindi il potere risolutivo R dipende da $\frac{dn}{d\lambda}$, quindi maggiore è la pendenza della curva n(λ) maggiore è il potere risolutivo e viceversa (a parità di $\Delta\lambda$ si ha una maggiore variazione di Δn).

Nel caso della formula di Cauchy:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

$$\boldsymbol{R = L\frac{dn}{d\lambda} = 2\frac{B}{\lambda^3}}$$

Dettagli sperimentali



A. Cannocchiale
B. Collimatore
C. Fenditura
D. Nonio
E. Prisma
F. Sorgente

- Mettere a fuoco all'infinito il cannocchiale (osservando un oggetto molto lontano);
- Accendere la sorgente, regolare la fenditura del collimatore e, mettendo il cannocchiale di fronte al collimatore, mettere a fuoco la fenditura regolando la distanza fenditura-lente del collimatore. Misurare sui noni (in generale ce ne sono 2 opposti) della scala graduata, la posizione in trasmissione del cannocchiale (saranno gli angoli di riferimento rispetto ai quali si misurerà l'angolo di deviazione);
- Montare il prisma sulla base dello spettroscopio e, mettendo il vertice del prisma (quello opposto alla superficie non lappata) verso la sorgente, trovare l'immagine della fenditura riflessa dalle due superfici otticamente lappate del prisma. L'immagine deve cadere all'incirca al centro dell'oculare altrimenti, se troppo alta o bassa, regolare la posizione del prisma usando le tre viti (vuol dire che il prisma non è in piano)
- Ruotare il prisma esponendo una faccia lappata alla sorgente e cercare con il cannocchiale le immagini della fenditura uscenti dall'altra superficie con

“colori” diversi (diverse lunghezze d’onda), all’incirca la posizione nella figura seguente.

- Per determinare l’angolo di deviazione minima (δ_{min}) ruotare leggermente il prisma seguendo, con il cannocchiale, il movimento della riga di cui si vuole determinare l’angolo. La riga si sposta inizialmente in una direzione poi inverte il movimento. Fermarsi nel punto di inversione. A questa posizione corrisponde l’angolo δ_{min}, che si calcola sottraendo ai valori degli angoli misurati sui in questa condizione ai valori determinati in condizione di trasmissione. ATTENZIONE AL PASSAGGIO SULLO ZERO DEI NONI!